Uma introdução à modelagem e precificação de derivativos climáticos em agricultura

Fredy Castellares - Ramiro Ruiz

(**Departamento de Estatística - UFMG**)

25 de Novembro de 2009

Sumário

Mercado (B, S)

Definição O mercado com uma única ação e um bond é denotado por mercado (S, B).

Podemos representar a evolução do modelo Bernoulli usando dois processos definidos no conjunto $\{0, 1\}$. O processo associado ao bond $\{B_0, B_1\}$ é determinístico e tem a seguinte dinâmica:

$$\boxed{B_1 = (1 + r)B_0, \qquad B_0 = 1} \tag{1}$$

onde a constante $r > 0$ é a taxa juros ao dia livre de risco.

O processo dos preços $\{S_0, S_1\}$ tem uma dinâmica aleatória e é definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), I\!P)$ da seguinte forma:

$$\boxed{S_0 = s > 0 \qquad \forall\omega \in \Omega, \qquad S_1(\omega) = s(1 + \xi(\omega))} \tag{2}$$

Onde $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{P}(\Omega) = \{\{0\}, \{1\}, \phi, \Omega\}$ é o conjunto das partes de $\{0, 1\}$, $\mathbb{P}$ é a probabilidade definida sobre a família de eventos $\mathcal{P}(\Omega)$ por

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = p^{\omega}(1 - p)^{1-\omega} \qquad \text{para todo} \qquad \{\omega\} \in \mathcal{P}(\Omega) \tag{3}$$

e ξ é a variável aleatória definida da seguinte forma:

$$\boxed{\xi(\omega) = u^{\omega} d^{1-\omega}, \;\; \omega \in \Omega} \tag{4}$$

Assumimos sempre que $\boxed{-1 < d < u}$.

Num mercado (S, B) de ação e bond um investidor pode possuir α partes da ação e β partes de um bond. Este par denotado por $\varphi = (\alpha, \beta)$ é denominado de carteira ou portfólio.

Definimos o valor da carteira no instante $t = 0$ igual a

$$V_\varphi(0) = \alpha S_0 + \beta B_0 = s\alpha + \beta$$

e no instante $t = 1$ igual a

$$V_\varphi(1) = \alpha S_1(\omega) + (1 + r)\beta$$

Não Arbitragem

Diremos que o mercado permite possibilidade de *arbitragem* se é possível formar uma carteira de valor zero no instante $t = 0$ e conseguir um valor positivo no instante $t = 1$ com probabilidade 1. Então uma carteira arbitradora é uma carteira $\varphi = (\alpha, \beta)$ que tem as seguintes propriedades. No instante $t = 0$

$$V_\varphi(0) = \alpha S_0 + \beta B_0 = s\alpha + \beta = 0$$

e no instante $t = 1$ igual a

$$V_\varphi(1) = \alpha S_1(\omega) + (1 + r)\beta > 0 \qquad \text{com probabilidade } 1$$

Mercados Perfeitos

Consideramos como verdadeiras as seguintes suposições

1. É permitido venda a descoberto e possuir partes fraccionárias de ação e de bond, em termos matemáticos isto significa que para cada $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ a carteira $\varphi = (\alpha, \beta)$ é permitida.

2. Não existe diferença entre preço de venda e o preço de compra dos ativos.

3. Não existem custos de negociação nem taxas.

4. O mercado tem completa liquidez, isto é, sempre é possível comprar ou vender quantidades não limitadas no mercado. Em particular, é possível tomar emprestado do banco quantidades não limitadas de dinheiro ou vender ações a descoberto.

Introduzimos o derivativo C com valor $C_1(\omega) = f(S_1(\omega))$

Princípio de Réplica.

Seja a constante $C_0 > 0$ e a função $C_1 = f(S_1(\omega)) \geq 0$. Uma carteira $\varphi = (\alpha, \beta)$ é chamada uma réplica de (C_0, C_1) se para todo $\omega \in \Omega$ cumpre-se

$$V_\varphi(0) = \alpha S_0(\omega) + \beta B_0 = C_0, \tag{5}$$

$$V_\varphi(1) = \alpha S_1(\omega) + \beta B_1 = C_1(\omega) \tag{6}$$

A probabilidade $\tilde{\mathbb{P}}$ definida sobre $\mathcal{P}(\Omega)$ é chamada de *probabilidade neutra ao risco* se

1. $\tilde{\mathbb{P}}(\{\omega\}) = \tilde{p} > 0$ para todo $\{\omega\} \in \mathcal{P}(\Omega)$.
2. $\tilde{\mathbb{E}}(S_1(\omega)) = (1+r)S_0$.

Onde $\tilde{\mathbb{E}}$ é a esperança calculada com respeito à probabilidade $\tilde{\mathbb{P}}$.

Propriedades

O modelo de mercado (S, B) é livre de arbitragem se, e somente se,

$$\boxed{d < r < u} \tag{7}$$

Para o modelo Binomial a probabilidade neutra ao risco é dada por

$$\tilde{p} = \frac{r-d}{u-d}, \qquad \tilde{q} = \frac{u-r}{u-d}. \tag{8}$$

Mercado Completo

Diremos que um derivativo (opção européia de compra ou venda) com valor C_1 é atingível (pode-se fazer uma réplica) se existir uma carteira

$$\varphi = (\alpha, \beta)$$

com valor dado por

$$V_\varphi(0) = \alpha S_0 + \beta$$

tal que o rendimento da carteira no instante $t = 1$ é igual a

$$C_1(\omega) := V_\varphi(1) = \alpha S_1(\omega) + (1 + r)\beta$$

Definição O mercado (B, S) é completo se cada derivativo definido nele é atingível.

Teoremas de Precificação

Primeiro Teorema de Precificação. O modelo de mercado (S, B) é livre de arbitragem se, somente se, existe ao menos uma probabilidade $\tilde{\mathbb{P}}$ neutra ao risco.

Segundo Teorema de Precificação. Um mercado (B, S) livre de arbitragem é completo se, somente se, existe uma única probabilidade $\tilde{\mathbb{P}}$(neutra ao risco) sob o qual o processo dos valores presentes dos preços $\{S_0, \frac{1}{1+r}S_1\}$ é um martingal.

Preço de um derivativo

$$C_0 = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{\tilde{P}}(C_1(\omega)) \tag{9}$$

Mercado Incompleto

Consideremos um modelo de mercado (S, Y, B), onde, B é um bond, S um ativo negociável(ação) e Y é ativo não negociável.

Assumimos por simplicidade que a taxa juros ao dia livre de risco é zero.

O processo dos ativos é $\{S_0, Y_0, S_1, Y_1\}$ tem uma dinâmica aleatória e é definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ da seguinte forma:

$$S_1(\omega_1) = S_0\xi^u, Y_1(\omega_1) = Y_0\eta^u \qquad S_1(\omega_2) = S_0\xi^u, Y_1(\omega_2) = Y_0\eta^d$$

$$S_1(\omega_3) = S_0\xi^d, Y_1(\omega_3) = Y_0\eta^u \qquad S_1(\omega_4) = S_0\xi^d, Y_1(\omega_4) = Y_0\eta^d$$

Onde $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{P}(\Omega) = 2^\Omega$ é o conjunto das partes de Ω, $I\!\!P$ é a probabilidade definida sobre a família de eventos $\mathcal{P}(\Omega)$ por

$$p_i = I\!\!P(\{\omega\}) > 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{10}$$

Assumimos, $\boxed{0 < \xi^d < 1 < \xi^u, \quad 0 < \eta^d < 1 < \eta^u, \quad Y_1 \neq 0}$.

Num mercado (S, Y, B) um investidor pode possuir α partes da ação e β partes de um bond. Este par denotado por $\varphi = (\alpha, \beta)$ é denominado de carteira.

Definimos o valor da carteira no instante $t = 0$ igual a

$$V_\varphi(0) = \alpha S_0 + \beta = x$$

e no instante $t = 1$ igual a

$$V_\varphi(1) = \alpha S_1(\omega) + (1 + 0)\beta := X_1$$

Então, no instante $t = 1$ o valor da carteira é dado por

$$X_1 = x + \alpha(S_1 - S_0) \tag{11}$$

Agora, introduzimos um derivativo com rentabilidade
$C_1(\omega) = c(S_1(\omega), Y_1(\omega))$

Para precificar C_1 necessitamos especificar nossa preferencia sobre risco. Escolhemos a função utilidade exponencial da forma

$$U(x) = -e^{-\gamma x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \gamma > 0. \tag{12}$$

A otimização do investimento, que finalmente nos levará para o preço de indiferença do derivativo C_1, é examinado via o valor da função

$$V^{C_1}(x) = \sup_{\alpha} \mathbb{E}_P\left(-e^{-\gamma(X_1 - C_1)}\right) = e^{-\gamma x} \sup_{\alpha} \mathbb{E}_P\left(-e^{-\gamma\alpha(S_1 - S_0) + \gamma C_1}\right), \tag{13}$$

Onde $V(x)$ é a máxima utilidade que pode ser obtida no instante $t = 1$ começando no instante $t = 0$ com valor x.

Definição de Preço Indiferente O preço de indiferença do derivativo $C_1 = c(S_1, Y_1)$ é definido como a quantidade $\nu(C_1)$ para o qual os valores de V^{C_1} e V^0 definidos pela equação (12) e correspondendo, respectivamente, aos derivativos C_1 e O coincidem. Isto é, $\nu(C_1)$ é a quantidade que satisfaz

$$V^0(x) = V^{C_1}(x + \nu(C_1)), \tag{14}$$

para todos os valores iniciais x.

Teorema Seja $\mathbb{Q}$ uma medida sob o qual o ativo negociável é um martingal e simultaneamente cumpre-se

$$\mathbb{Q}(Y_1|S_1) = \mathbb{P}(Y_1|S_1)$$

Seja um derivativo $C_1 = c(S_1, Y_1)$ a ser precificado sob função utilidade exponencial com coeficiente de aversão ao risco γ. Então, o preço de C_1 é dado por

$$\nu(C_1) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{\gamma}\log \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{\gamma C_1}|S_1)\right) \tag{15}$$

Exemplo de Derivativo Agrícola

Consideremos um modelo de mercado com um vendedor (banco, seguradora) e um comprador (fazendeiro, etc). No instante $t = 0$ ambos agentes otimizam seus investimentos com intensão de maximizar seus valores finais no tempo $t = 1$. Não está permitido fazer ajustes das carteiras entre os tempos zero e um.

Ponto de vista do vendedor No início do período o vendedor tem um valor x_v. O vendedor investe α_v(valor das ações) em ações. O restante esta investido no banco. Então, o valor da carteira sem derivativo climático é dado por

$$X_v^{sem} = (x_v - \alpha_v)q_f + \alpha_v q_v, \tag{16}$$

onde $q_f = 1 + r_f$ e $q_v = 1 + r_v$ sao os retornos sem risco e com risco.

Agora assumimos que o vendedor vende $k \neq 0$ partes de um derivativo climático pelo preço F_v. Com isto valor da carteira com derivativo climático é dado por

$$X_v^{com} = (x_v - \alpha_v + kF_v)q_f + \alpha_v q_v - kW_1, \tag{17}$$

onde W_1 é o valor(rentabilidade) do derivativo climático.

Ponto de vista do comprador No início do período o comprador tem um valor x_c. O comprador investe α_c em produtos de risco associado à produção, que em algum sentido depende do clima. O restante esta investido no banco. Então, o valor da carteira sem derivativo climático é dado por

$$X_c^{sem} = (x_c - \alpha_c)q_f + \alpha_c q_c, \tag{18}$$

onde $q_c = 1 + r_c$ é o retorno sobre a produção.

Agora assumimos que o comprador compra $k \neq 0$ partes de um derivativo climático pelo preço F_c. Com isto valor da carteira com derivativo climático é dado por

$$X_c^{com} = (x_c - \alpha_c - kF_c)q_f + \alpha_c q_c + kW_1, \tag{19}$$

onde W_1 é o valor(rentabilidade) do derivativo climático.

Agora derivamos o preço de indiferença para o vendedor. Para isto usamos a definição do valor

$$\sup_{\alpha} \mathbb{E}\left[u(X_v^{sem})\right] = \sup_{\alpha} \mathbb{E}\left[u(X_v^{com})\right] \tag{20}$$

Para obter uma solução fechada, vamos a usar a função utilidade exponencial e assumir que os valores das carteira seguem distribuição normal. Usando o teorema de Pratt, substituímos o valor da utilidade por seu valor equivalente(VE), isto é

$$VE = \mathbb{E}[X] - \frac{\gamma}{2}\sigma^2(X)$$

Com isto a equação (19) é igual a

$$\sup_{\alpha}\left(\mathbb{E}(X_v^{sem}) - \frac{\gamma_v}{2}\sigma^2(X_v^{sem})\right) = \sup_{\alpha}\left(\mathbb{E}(X_v^{com}) - \frac{\gamma_v}{2}\sigma^2(X_v^{com})\right) \tag{21}$$

Usando as equações (17) e (18) e maximizando em obtemos

$$\alpha_v^{*sem} = \frac{\mathbb{E}(q_v) - q_f}{\gamma_v \sigma_{q_v}^2} \tag{22}$$

$$\alpha_v^{*com} = \frac{\mathbb{E}(q_v) - q_f + \gamma_v k Cov(q_v, W_1)}{\gamma_v \sigma_{q_v}^2} \tag{23}$$

Substituindo estes valores na equação (20) temos

Resultado 1

O preço para vendedor é dado por

$$F_v = \frac{1}{q_f}(\mathbb{E}(W_1) + \pi_v), \tag{24}$$

onde

$$\pi_v = -\frac{1}{2}\gamma_v k \sigma^2_{W_1}(\rho^2_{q_v,W_1} - 1) - \frac{\sigma_{W_1}}{\sigma_{q_v}}(\mathbb{E}(q_v) - q_f)\rho_{q_v,W_1} \tag{25}$$

Resultado 2

O preço para comprador é dado por

$$F_c = \frac{1}{q_f}(\mathbb{E}(W_1) + \pi_c), \tag{26}$$

onde

$$\pi_c = \frac{1}{2}\gamma_c k \sigma^2_{W_1}(\rho^2_{q_c,W_1} - 1) - \frac{\sigma_{W_1}}{\sigma_{q_c}}(\mathbb{E}(q_c) - q_f)\rho_{q_c,W_1} \tag{27}$$

Existencia

Um seguro climático existira se

$$F_c(k) > F_v(k)$$

Então,

$$\pi_c > \pi_v$$

π_c é linear e decrescentes em K e π_v é linear e crescente em k. Quando ambas as retas encontram-se existirá um preço.

References

Musiela, M. (2005). matingale Methods in Financial Moelling, second edition. Springer.

Musiela, M. , Zariphopoulou, T. Derivatives pricing, investment management and the term structure of exponential utilities : The case of binomial model, pre-print (2007).

Xu, W. Odening, M, Musshoff, O. Indifference pricing of weather derivatives. Amer. J. Agr. Econ. 90(4), 979-993, 2008.