Considerações sobre a inclusão de efeitos aleatórios em modelos de transição de Markov

Idemauro Antonio Rodrigues de Lara
Departamento de Estatística, Universidade Federal do Paraná
Clarice Garcia Borges Demétrio
Departamento de Ciências Exatas, ESALQ-Universidade de São Paulo
Sílvia Emiko Shimakura
Departamento de Estatística, Universidade Federal do Paraná

1 Introdução

MODELO DE TRANSIÇÃO DE MARKOV $\Rightarrow$ MLG para a distribuição condicional de Y_{it} dado $\boldsymbol{h}_{it}$ e $\boldsymbol{x}_{it}$ $\Rightarrow$ modelos baseados em processos estocásticos (DIGGLE et al., 2002).

- $\boldsymbol{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in_i})'$ (variáveis respostas);
- $\boldsymbol{x}_{it} = (x_{it1}, \ldots, x_{itp})'$ (covariáveis);
- $\boldsymbol{h}_{it} = (y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{i,(t-1)})$ (respostas prévias).

A média e a variância condicional satisfazem as equações:

$$g(\mu_{it}^C) = \eta_{it} = \boldsymbol{x}_{it}'\boldsymbol{\beta} + \sum_{r=1}^{s} f_r(\boldsymbol{h}_{it}; \boldsymbol{\alpha}) \quad \text{e} \quad v_{it}^C = v(\mu_{it}^C)\phi, \tag{1}$$

Parâmetros de interesse (a priori)$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$ $\Rightarrow$ modelos de efeitos fixos.

- Com Variáveis categorizadas $\Rightarrow$ especificar probabilidades de transição.
- Para dados binários, assumindo ligação canônica e dependência estocástica 1, tem-se:

$$\boldsymbol{P}(t) = \begin{pmatrix} \pi_{00}(t) = \dfrac{1}{1+\exp(\boldsymbol{x}_{it}'\boldsymbol{\beta})} & \pi_{01}(t) = \dfrac{\exp(\boldsymbol{x}_{it}'\boldsymbol{\beta})}{1+\exp(\boldsymbol{x}_{it}'\boldsymbol{\beta})} \\ \\ \pi_{10}(t) = \dfrac{1}{1+\exp(\boldsymbol{x}_{it}'\boldsymbol{\beta}+\alpha)} & \pi_{11}(t) = \dfrac{\exp(\boldsymbol{x}_{it}'\boldsymbol{\beta}+\alpha)}{1+\exp(\boldsymbol{x}_{it}'\boldsymbol{\beta}+\alpha)} \end{pmatrix}.$$

1.1 Considerações iniciais

- não há razões para se restringir apenas aos efeitos fixos na estrutura do preditor linear (1) [Korn e Whittemore (1979); Stiratelli, Laird e Ware (1984); Lara (2007)];
- a estrutura de medidas repetidas com variáveis binárias aliada ao número de ocasiões pode esconder a existência de efeitos aleatórios;
- necessidade de desenvolverem estudos com simulação.

2 Métodos

2.1 Definição do modelo de transição misto

Para uma cadeia de ordem q, tem-se como preditor linear:

$$\eta_{it} = \boldsymbol{x}'_{it}\boldsymbol{\beta} + \sum_{r=1}^{s} f_r(\boldsymbol{h}_{it};\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{z}'_{it}\boldsymbol{d}_i, \tag{2}$$

em que $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}$ são os parâmetros associados aos efeitos fixos, $\boldsymbol{z}_{it}$ é a i-ésima linha da matriz do modelo associada ao vetor de efeitos aleatórios, $\boldsymbol{d}_i(k \times 1)$. Sendo $\boldsymbol{d}_i \sim N_k(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{G})$.

Para simplificar a notação (2), considere $\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$:

$$\eta_{it} = \boldsymbol{x}^{*'}_{it}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{z}'_{it}\boldsymbol{d}_i.$$

A função de verossimilhança para $\boldsymbol{\delta}$ e $\boldsymbol{G}$ no caso estacionário é proporcional a:

$$L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{G}; \boldsymbol{y}) \propto \prod_{i=1}^{N} \int \prod_{t=2}^{n_i} [\mu_{it}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{G})]^{y_{it}} [1 - \mu_{it}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{G})]^{1-y_{it}} f(\boldsymbol{d}_i; \boldsymbol{G}) d(\boldsymbol{d}_i), \tag{3}$$

em que $\mu_{it}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{d}_i) = \mathrm{E}(Y_{it} \mid \boldsymbol{d}_i; \boldsymbol{\delta})$.

Focalizando a atenção sob função de ligação canônica e supondo distribuição normal para o efeito aleatório, $\boldsymbol{d}_i$, a expressão (3), reduz-se a:

$$\prod_{i=1}^{N} \int \exp\left[\boldsymbol{\delta}' \sum_{t=2}^{n_i} \boldsymbol{x}^{*}_{it} y_{it} + \boldsymbol{d}'_i \sum_{t=2}^{n_i} \boldsymbol{z}_{it} y_{it} - \sum_{t=2}^{n_i} \ln\{1 + \exp(\boldsymbol{x}^{*'}_{it}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{z}'_{it}\boldsymbol{d}_i)\}\right] (2\pi)^{-1} |\boldsymbol{G}|^{-1/2} \exp\left(\frac{-\boldsymbol{d}'_i \boldsymbol{G}^{-1} \boldsymbol{d}_i}{2}\right) d(\boldsymbol{d}_i), \tag{4}$$

em que $\boldsymbol{G}$ é matriz de covariâncias dos efeitos aleatórios, $\boldsymbol{d}_i$.

Nesse trabalho, para maximização da função (4) optou-se pela técnica baseada na aproximação dos integrandos (Método de Laplace), devido à otimização do custo operacional das simulações.

2.2 Estudo por simulação

A implementação computacional foi feita no *software* R.

- Modelo para simulação:

$$\eta_{it} = (\beta_0 + d_{i0}) + \beta x_{it} + \alpha y_{i(t-1)} \tag{5}$$

- assumindo estacionariedade e alance 1 para a cadeia;
- vetor de parâmetros: $\boldsymbol{\delta} = (-2,5; 1,0; 2,0)$ e $d_i \sim N(0; 0,5)$;
- $n = 500$ indivíduos;
- $t = 4, 5, 8$ e 12 ocasiões;
- 10.000 simulações para cada situação de ocasião;
- ajustaram-se modelos de transição com interceptos aleatórios (estrutura real $\Rightarrow$ equação 5) pela função *glmmML* e ignorando-se essa estrutura pela função *geeglm* (modelos somente com efeitos fixos);
- teste da razão de verossimilhanças e o critério da informação de Akaike (AIC) foram usados para discriminar entre esses dois modelos.

3 Resultados

Tabela 1: Erro quadrático médio das estimativas dos parâmetros com base nos dados simulados, considerando modelos somente com efeitos fixos (Modelo 1) e mistos (Modelo 2) e 4 diferentes números de possibilidades de ocasiões.

	$t = 4$	
Parâmetros	Modelo 1	Modelo 2
β_0	0,01896	0,02364
β_1	0,02749	0,02905
α	0,05632	0,04858
	$t = 5$	
Parâmetros	Modelo 1	Modelo 2
β_0	0,01515	0,01583
β_1	0,02311	0,02221
α	0,05317	0,03952
	$t = 8$	
Parâmetros	Modelo 1	Modelo 2
β_0	0,01070	0,00847
β_1	0,01783	0,01339
α	0,05040	0,02031
	$t = 12$	
Parâmetros	Modelo 1	Modelo 2
β_0	0,00825	0,00533
β_1	0,01573	0,00913
α	0,04926	0,01011

Tabela 2: Percentual do número de vezes em que o AIC do Modelo 1 foi maior do que o do Modelo 2 de acordo com o número de ocasiões.

	Número de ocasiões			
	4	5	8	12
Percentual	$12,29\%$	$18,66\%$	$62,59\%$	$96,93\%$

Verificou-se uma tendência dos modelos em subestimar o efeito da covariável X e superestimar o efeito de $Y_{(t-1)}$, sendo esses vícios maiores para o Modelo 1, ou seja, ignorar a existência de efeito aleatório fatalmente acarretará em estimativas viciadas, que conseqüentemente vão distorcer as probabilidades de transição.

4 Considerações finais

- Modelos de transição misto tem duas fontes de correlação: história e heterogeneidade entre os coeficientes de regressão;

- Deve-se avaliar a necessidade da inclusão de efeitos aleatórios ou ainda testar a existência desses efeitos no modelo;
- Matriz de probabilidades de transição pode ser interpretada individualmente, ou seja, uma matriz para cada indivíduo.

Referências Bibliográficas

DIGGLE, P.J.; HEAGERTY, P.J.; LIANG, K.Y.; ZEGER, S.L. **Analysis of longitudinal data**. New York: Oxford University Press, 2002, 379 p.

KORN, E.L.; WHITTEMORE, A.S. Methods for analysing panel studies of acute health effects of air pllution. **Biometrics**, Washington, v. 35, p. 715 – 802, 1979.

LARA, I.A.R. **Modelos de transição para dados binários**. 2007, 111 p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agronômica), Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz-USP, Piracicaba, 2007.

STIRATELLI, R.; LAIRD, N.; WARE, J.H. Random effects-models for serial observations with binary response. **Biometrics**, Washington, v. 40, p. 961 – 971, 1984.