Agulha de Buffon: uma aplicação computacional

Diego Rodrigo Hachmann[1], João Candido Bracarense[1], Alexandre Scheidt[1], Odair Moreira de Souza[1]

[1]Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Caixa Postal 711 – 85.819-110 – Cascavel – PR – Brasil
diego_hachmann@hotmail.com, bracarense@unioeste.br, alexandre@mjrnet.com.br, dayrsouza@gmail.com.

Resumo. *Agulha de Buffon é um problema de probabilidade inventado pelo cientista francês Georges Louis Leclerc, conde de Buffon, no início do século XVIII, utilizando o método de simulação de Monte Carlo. Através de um algoritmo computacional, e milhões de jogadas, deseja-se chegar a um valor aproximado do valor de pi. Mostrando assim, de um modo experimental, o teorema de agulha de Buffon.*

Palavras chaves. *Monte Carlo, algoritmo computacional, matemática aplicada.*

1. Introdução

O estudo das integrais trigonométricas é um tema bastante interessante, talvez, por ser um tema novo ao estudante recém participante do ensino superior. Várias são as aplicações, tanto do ponto de vista acadêmico, quanto à vida cotidiana.

Um dos estudos que permite o uso do termo interdisciplinar, sem dúvida, é o problema da agulha de Buffon, pois envolve diversos conteúdos visando encontrar, como conseqüência, um valor aproximado do número pi.

Segundo BOYER (1974), cabe a Georges Louis Leclerc, conde de Buffon, um teste empírico do Paradoxo de S. Petersburgo, e também a autoria de uma célebre História Natural, em vários volumes. Buffon era conhecido pelos cientistas como um iconoclasta que propôs uma avaliação de cerca de 75 000 anos para a idade da terra, em vez de 6 000 anos então comumente aceita.

Os matemáticos conhecem Buffon por duas contribuições: uma tradução para o francês do “Método dos fluxos de Newton e o “problema da agulha de Buffon” na teoria das probabilidades. Ele sugeriu, também, o que era essencialmente um novo ramo da teoria das probabilidades, problemas envolvendo considerações geométricas.

Leclerc propôs que sobre uma grande área plana se traçassem retas paralelas eqüidistantes e que uma agulha fina fosse lançada ao acaso sobre a área plana, a probabilidade de a agulha cair cortando uma das retas é corretamente como sendo $2l / \pi d$,

onde d é a distância entre as retas e l o comprimento da agulha, $d \leq l$.

O matemático que mais se destacou na teoria das probabilidades, no entanto, foi Laplace e é dele a frase “no fundo a teoria das probabilidades é apenas o senso comum expresso em números.”

Entre as muitas teorias a que Laplace chamou a atenção em sua Teoria Analítica foi o cálculo de π através do problema da agulha de Buffon que tinha sido praticamente esquecido por quase meio século. Esse é conhecido com o problema da agulha Buffon-Laplace, pois este matemático estendeu o problema original a um reticulado de duas coleções perpendiculares entre si de retas paralelas eqüidistantes.

O presente trabalho apresenta, em linhas gerais, o problema da agulha de Buffon, vista com o apoio geométrico e em seguida no formato computacional.

2. Objetivo

Estudar o problema que envolve a agulha de Buffon nos contextos geométrico, analítico e computacional.

3. Material e Métodos

De posse com os termos de SIMMONS (1987) apresenta-se a metodologia referente ao problema específico.

Inicia-se com uma breve digressão para explicar o uso que se faz da palavra “probabilidade”. Em Matemática essa palavra significa uma medida numérica da possibilidade de um certo evento acontecer.

Dada uma agulha de 4cm de comprimento, quando jogada ao acaso num assoalho feito de tábuas de 4cm de largura, qual a probabilidade de que a agulha caia atravessando uma das junções?

Seja a distância x entre o centro da agulha e a junção mais próxima. Não é difícil constatar que nesse caso que x pertence ao intervalo [0, 2].

Agora, tomando θ como o menor ângulo entre a agulha e uma reta perpendicular as junções, tem-se θ pertencente ao intervalo fechado $[0, \pi/2]$, Figura 1.

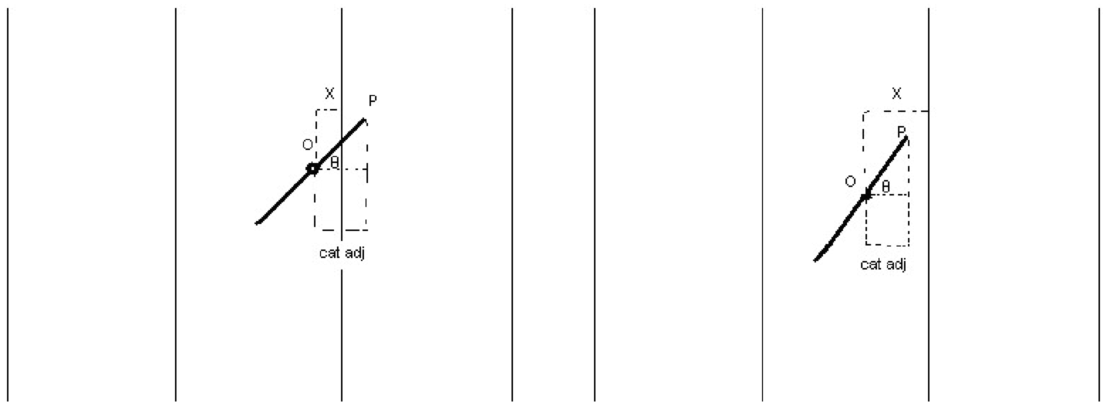

Figura 1 – possibilidades da queda agulha no assoalho

Analisando a Figura 1, percebe-se que o evento de interesse é aquele que coincide a variável x ser menor que o cateto adjacente do argumento θ.

Mas pelo triângulo retângulo de hipotenusa OP, tem-se que:

$\cos \theta$ = cateto adjacente de θ / OP

Como a agulha mede 4 cm, OP = 2, então:

cateto adjacente = $2 \cos \theta$.

Assim os seguintes eventos podem ocorrer:

1 – Quando $x < 2 \cos \theta$, a agulha cairá sobre uma das junções.

2 – Quando $x \geq 2 \cos \theta$, a agulha não cairá sobre uma das junções.

A interpretação geométrica é dada com o auxílio da Figura 2, assim o gráfico representa todas as possibilidades de eventos, e a parte sombreada representa o evento em que a agulha caiu sobre uma das junções.

Assim:

?

$$P = \frac{\text{Área sob a curva}}{\text{Área do retângulo}}$$

então:

$$P = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta = \frac{2}{\pi}$$

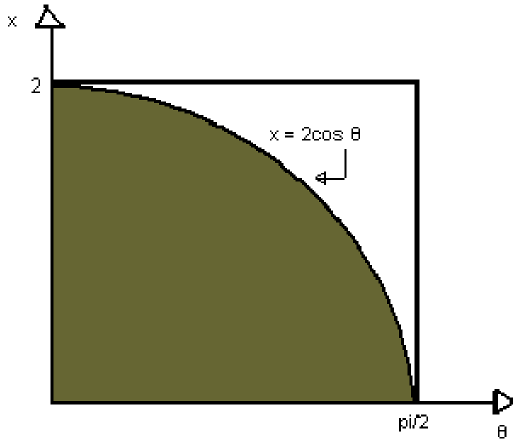

Figura 2 – Representação nas coordenadas cartesianas

Portanto a probabilidade da agulha cair sobre a junção é $P = \frac{2}{\pi}$. Mas a probabilidade é a razão entre o número de lançamentos em que a agulha caiu sobre a junção e o total de lançamentos.

Tomando como *n* o total de lançamentos e como *k* o número de vezes em que a agulha caiu sobre a junção, tem-se um valor aproximado de pi quando *n* tende ao infinito. Ou seja,

$$P = \frac{k}{n} \cong \frac{2}{\pi}$$

E, portanto, no limite, para valores grandes de *n*, tem-se:

$$\pi \cong \frac{2n}{k}$$

Os conteúdos necessários para um completo entendimento da agulha de Buffon são a trigonometria em triângulo retângulo, integração trigonométrica, e, portanto, conhecimentos em cálculo diferencial e integral, a simulação de Monte Carlo e a teoria das probabilidades.

4. Resultados

Pensando em um algoritmo, tem-se o interesse do seguinte evento: se x < 2 cos θ, então a agulha cai sobre uma das junções. Mas *x* e 2cos θ pertencem a I = [0, 2]. Para efeito de um algoritmo x e θ são valores pseudos-aleatórios.

Considerando que x é 2 vezes rand(0,1), onde rand representa uma função de números reais no intervalo [0,1]. Então se tem a seguinte desigualdade

$$2.\text{rand}(0,1) < 2.\cos\ \theta$$

desse modo, finalmente, tem-se o evento rand(0,1) < cos θ

Assim, apresentam-se dois algoritmos – implementação em C^{++} (PRATA, 1998) – que permitem avaliar o valor de pi pela simulação de Monte Carlo ao problema da agulha de Buffon.

Para alcançar os resultados, os algoritmos elaborados utilizaram a plataforma *windows*.

O Algoritmo 1

```
#include <time.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
/*rand() devolve inteiro no intevealo [0, 2147483647] */
/*gera um número pseudo-randomico real no intervalo [0,1] */
double realRandon(void)
{
   int a = rand();
   int b = rand();
   if(a>b)
      return (double)b/a;
   else
      return (double)a/b;
}
int main(void)
{
   time_t seed = time(NULL);
   clock_t startTime, endTime;
   int i=0, indice=1;
   double distancia, theta;
   long int cont = 0, ponto_atual;
   srand((unsigned)seed);
   startTime = clock();
   while(indice <= 8)
   {
      ponto_atual = (int)pow(10,indice);
      for( ; i<ponto_atual; i++)
      {
         theta = realRandon() * M_PI/2;
         distancia = realRandon();
         if(distancia < cos(theta))
            cont++;
      }
      endTime = clock();
```

```
    printf( "Jogadas: 10^%d  Eventos + : %9li    PI Aprox : %1.7f %10.2f s.\n",
        indice, cont, 2.0*i/cont, (double)(endTime - startTime) / CLOCKS_PER_SEC);
        indice++;
}
printf("\n\n%35s", "FIM");
getchar();
     }
```

O Algoritmo 2

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <time.h>

/*gera um número pseudo-randomico real no intervalo [0,1] */
float realRandon(void)
{
	int a = rand()%1000;
	int b = rand()%1000;
	if(a>b)
		return (float)b/a;
	else
		return (float)a/b;
}
/*devolve um valor de um cosseno pseudo-randomico */
float coseno(void)
{
	int a = rand()%1000;
	int b = rand()%1000;
	return ((float)b / sqrt(a*a+b*b));
}
int main(void)
{
	float soma = 0;
	int i, count=0;
```

```
	long seed = time(NULL);
	srand((unsigned)seed);
	for(i=0; i<1000000; i++) {
		if(realRandon() < coseno())
			count++;
		}
	printf("%f", 2.0*(float)i /(1.0*count));
}
```

5. Análise dos Resultados

Esta seção discutirá os resultados específicos dos algoritmos elaborados em um primeiro momento.

No Algoritmo 1, a aproximação do valor de pi é bastante boa, Tabela 1, mas a rotina que determina o valor de teta, que será utilizado como argumento do co-seno, utiliza o produto entre um aleatório real unitário e a metade do valor de pi.

Tabela 1: Resultados do Algoritmo 1

Iterações	caiu sobre junção	valor aproximado de pi	tempo (seg.)
10^1	5	4.0000000	0.00
10^2	62	3.1935484	0.00
10^3	624	3.2051282	0.00
10^4	6355	3.1468135	0.00
10^5	63680	3.1407035	0.03
10^6	636734	3.1410291	0.34
10^7	6366903	3.1412447	3.48
10^8	63663208	3.1415319	34.45
10^9	636643970	3.1414732	345.30

O Algoritmo 1 apresenta um problema, que induz o resultado. Desta forma, construiu-se outro algoritmo que permitisse uma avaliação menos tendenciosa.

No Algoritmo 2, nota-se que não existe uma boa aproximação, o valor converge para 3,08, sendo usado a função ‘co-seno’ que gera dois número aleatórios que são tratados como cateto adjacente e cateto oposto de um triângulo retângulo, e então é retornado o valor do co-seno do mesmo, conforme Tabela 2.

Tabela 2: Resultados do Algoritmo 2

Iterações	caiu sobre junção	valor aproximado de pi	tempo (seg.)
10^1	7	2.8571429	0.00
10^2	66	3.0000000	0.00
10^3	648	3.0864198	0.00
10^4	6462	3.0947075	0.00
10^5	64789	3.0869438	0.03
10^6	649081	3.0812795	0.34
10^7	6483425	3.0847893	3.56
10^8	64864567	3.0833475	34.86
10^9	648594876	3.0835890	322.23

Em seguida será feita uma comparação entre os dois procedimentos.

6. Conclusão

Esse trabalho propõe uma discussão sobre o problema da Agulha de Buffon e o estudo da probabilidade dentro de um contexto geométrico, algébrico e computacional, considerando dois algoritmos.

O Algoritmo 1 atinge uma aproximação desejada para o valor de pi, após

1 000 000 000 lançamentos, no entanto, a semente utilizada parte de um valor de referência de pi. Assim, partindo-se de outro valor pseudo-aleatório pode-se não se alcançar uma aproximação satisfatória.

O Algoritmo 2 parte de um valor pseudo-aleatório mais consistente e obtém a aproximação de 3,08 para o valor de pi.

Conclui-se, desta forma, que o Algoritmo 2 é mais adequado, e assim, o estudo confirma – experimentalmente (em laboratório) – as conclusões do conde de Buffon.

7. Referências

BOYER, C. B. História da Matemática. Editora Edgard Blücher Ltda. São Paulo. 1974. 488p.

PRATA, S. C^{++} The Waite Group's Primer Plus. Third Edition. Final ANSI/ISSO Standard C^{++}. Sams Publishing. 1998. 1040p.

SIMMONS, G. F. Cálculo com geometria analítica. Volume 1. McGraw-Hill. Rio de Janeiro. 1987. p.428-431.