Testes de hipótese: Motivação

Prof. Paulo Justiniano Ribeiro Junior

Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

Inferência estatística

Falar sobre **população** a partir da observação da **amostra**.

Na **inferência estatística** os dois principais objetivos são:

1. **Estimar** um parâmetro populacional.
   - Estimativa pontual.
   - Estimativa intervalar.
2. **Testar** uma hipótese ou afirmativa sobre um parâmetro populacional.

Figura 1. Analogia ao processo de estimação. Extraído de bestbowreviews.com.

Testes de hipótese

Hipótese

É uma afirmativa sobre uma **propriedade** da população.

Teste de hipótese

- É um procedimento para se testar uma **afirmativa** sobre uma propriedade da população.
- Permite tomar **decisões** sobre a população com base em informações de dados amostrais.

Um exemplo: proporção sexual em peixes

- Deseja-se estudar a proporção de peixes machos e fêmeas de uma mesma espécie em uma lagoa.
- Sem nenhuma informação prévia, supõe-se que a proporção sexual é de 50% ($p = 0.5$).
- Se, em uma amostra de 100 peixes:
  - 54 forem fêmeas.
  - 65 forem fêmeas.
  - 92 forem fêmeas.
- Qual a evidência necessária para concluir que a proporção de fêmeas é maior que a de machos nessa população?

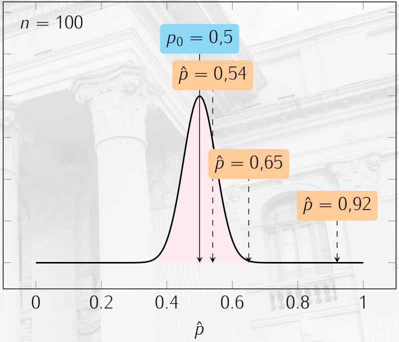

Figura 2. Proporções amostrais supondo $p = 0.5$ na população.

Um exemplo: cardápio vegano

- Um restaurante deseja caracterizar o perfil de seus clientes.
- Questionário para uma *amostra* de clientes.
- **Q1:** Há interesse por opções veganas? ($\hat{p} = 0.12$ em uma amostra).

Figura 3. Foto de Pexels.

Intervalo de confiança

- **Pergunta**: Qual a proporção que prefere pratos veganos?
- 0.12 ± 0.035 ou $(0.085, 0.155)$

Teste de hipótese

- **Pergunta**: A proporção de clientes que prefere pratos veganos supera 10%?
- $\hat{p} = 0.12$ é **significativamente maior** do que $p = 0.10$?

Um exemplo: caracterização dos clientes

Q2: Qual será a *idade média* dos clientes?
($\overline{y} = 32$ em uma amostra)

Figura 4. Foto de Adrienn no Pexels.

Intervalo de confiança

- **Pergunta**: Qual a idade média dos clientes?
- 32 ± 2.5 ou $(29.5, 34.5)$

Teste de hipótese

- **Pergunta**: A idade média dos clientes é igual a 35 anos?
- $\overline{y} = 32$ é **significativamente diferente** de $\mu = 35$?

Um exemplo: caracterização dos clientes por sexo

Q3: Qual será a *idade média* dos clientes **por sexo**?
($\overline{y}_h = 34$ para homens e $\overline{y}_m = 31$ para mulheres em uma amostra)

Intervalo de confiança

- **Pergunta**: Qual a idade média dos clientes homens e mulheres?
- 34 ± 2.3 ou $(31.7, 36.3)$ para homens
- 31 ± 2.8 ou $(28.2, 33.8)$ para mulheres
- ou ainda a diferença de idade
- 3 ± 2.5 ou $(0.5, 5.5)$

Teste de hipótese

- **Pergunta**: Existe diferença (**significativa**) entre a idade média dos clientes homens e mulheres?
- $\overline{y}_h - \overline{y}_m = 34 - 31 = 3$ é **significativamente diferente** de $\mu_h - \mu_m = 0$?

Fundamento lógico do teste de hipótese

Testamos uma afirmativa na tentativa de distinguir entre resultados que:

- Podem **facilmente** ocorrer por *acaso* na amostra.
- São **altamente improváveis** de ocorrer por *acaso* na amostra.

A ocorrência de **resultados altamente improváveis** pode ser explicada de uma das duas formas:

- Ou um evento raro realmente **ocorreu**.
- Ou a **suposição** subjacente não é verdadeira.

Regra do evento raro

Se, sob uma dada **suposição**, a probabilidade de um evento observado particular é **extremamente pequena**, concluímos que a suposição **provavelmente** não é verdadeira.

Componentes de testes de hipótese

Prof. Paulo Justiniano Ribeiro Junior

Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

Tópicos

- **Fundamentos de testes de hipóteses.**
  - **Hipóteses estatísticas.**
    - **Significância e tipos de erro.**
    - **Tipos de testes.**
    - **Estatísticas de teste.**
    - **Nível descritivo (p-valor).**
- Testes para médias.
- Testes para variâncias.
- Testes para proporções.

Figura 1. Foto de James Wheeler no Pexels.

Testes de hipótese

Hipótese

É uma afirmativa sobre uma **propriedade** da população.

Teste de hipótese

- É um procedimento para se testar uma **afirmativa** sobre uma propriedade da população.
- Permite tomar **decisões** sobre a população com base em informações de dados amostrais.

Figura 2. Cena do filme Os Incríveis.

Procedimentos gerais para um teste de hipótese

1. **Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).**
2. Definir um nível de significância α, que irá determinar o nível de confiança $100(1 - \alpha)\%$ do teste.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a estatística de teste, com base na distribuição amostral do estimador do parâmetro sob teste $\rightarrow$ valor calculado.
5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α $\rightarrow$ valor crítico.
6. Concluir o teste.

1. Definição de hipóteses · tipos de hipótese

Hipótese nula H_0

- É uma afirmativa de que o valor de um parâmetro populacional é **igual** a algum valor especificado.
- O termo *nula* é usado para indicar nenhuma mudança ou nenhum efeito.
- Exemplos:

$$\mu = 10$$
$$p = 0.5$$
$$\sigma^2 = 4.$$

Hipótese alternativa H_a

- É uma afirmativa de que o parâmetro tem um valor que, de alguma forma, **difere** da hipótese nula.
- Exemplos:

$$\mu \neq 10$$
$$p > 0.5$$
$$\sigma^2 < 4.$$

Quando fazemos um teste de hipótese, chegamos a um dos dois possíveis resultados:

- **Rejeitar** H_0: em favor da hipótese alternativa H_a.
- **Não rejeitar** H_0: e conclui-se que não existem diferenças.

Atenção!

- O termo **aceitar** a hipótese nula é filosoficamente incorreto, pois não se pode aceitar uma hipótese baseada apenas em evidências amostrais.
- E ainda existe um **erro** associado a todo teste de hipótese.

1. Definição de hipóteses · a hipótese alternativa

Teoria do falsificacionismo de K. Popper

- Uma hipótese **não pode ser provada**, apenas **desprovada**.
- Se a hipótese permanece válida então ela **não é validada**, mas adquire um certo "**grau de confiança**".

- Se você está fazendo um estudo e deseja usar um teste de hipótese para **apoiar** sua afirmativa, esta deve ser escrita de modo a se tornar a **hipótese alternativa**.
- Você nunca pode apoiar uma afirmativa de que um parâmetro **seja igual** a algum valor específico.
- Nesse contexto de se tentar apoiar o resultado de pesquisa, a hipótese alternativa é, algumas vezes, chamada de **hipótese de pesquisa**.

1. Definição de hipóteses · exemplo

Em um estudo sobre a proporção sexual de peixes de uma mesma espécie em uma lagoa, deseja-se testar a hipótese de que a proporção de fêmeas é maior do que a proporção de machos.

- Supondo inicialmente que a proporção de fêmeas é de 50% ($p = 0.5$), então

$$H_0 : p = 0.5 \quad \text{vs} \quad H_a : p > 0.5$$

- Com isso, deseja-se que a **hipótese nula** $p = 0.5$ seja rejeitada, de modo que a **hipótese alternativa** $p > 0.5$ seja apoiada.
- Apoiar a hipótese alternativa de que $p > 0.5$ é o mesmo que apoiar a afirmativa de a proporção de fêmeas na população é maior do que a de machos.

Procedimentos gerais para um teste de hipótese

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. **Definir um nível de significância** α**, que irá determinar o nível de confiança** $100(1-\alpha)$**% do teste**.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a estatística de teste, com base na distribuição amostral do estimador do parâmetro sob teste $\rightarrow$ valor calculado.
5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível. de significância α $\rightarrow$ valor crítico.
6. Concluir o teste.

2. Nível de significância · erros de decisão

Para entendermos o que é o nível de significância (α), precisamos saber que, ao realizar um teste de hipótese, estamos sujeitos a dois tipos de erros.

- **Erro Tipo I**: rejeitar H_0, quando H_0 é verdadeira (falso negativo).
- **Erro Tipo II**: não rejeitar H_0, quando H_0 é falsa (falso positivo).

	H_o **verdadeira**	H_o **falsa**
Não rejeitar H_0	Decisão correta	Erro tipo II
Rejeitar H_0	Erro tipo I	Decisão correta

2. Nível de significância · ilustração dos erros

Figura 3. Erros de decisão em testes de hipótese. Modificado de www.irishmirror.ie.

2. Nível de significância · definição dos erros

Definimos por α e β as probabilidades de cometer os erros do tipo I e II:

- $\alpha = \text{P(erro tipo I)} = \text{P(rejeitar } H_0 \,|\, H_0 \text{ verdadeira)}$.
- $\beta = \text{P(erro tipo II)} = \text{P(não rejeitar } H_0 \,|\, H_0 \text{ falsa)}$.
  - α é o **nível de significância** do teste.
  - $1 - \alpha$ é o **nível de confiança** do teste.

No exemplo anterior, se $H_0 : p = 0.5$ e $H_a : p > 0.5$, então:

- $\alpha = $ P(concluir que a proporção de fêmeas é maior quando na verdade não é).
- $\beta = $ P(concluir que a proporção sexual é igual quando na verdade não é).

2. Nível de significância · balanço entre os erros

- A situação ideal é aquela em que ambas as probabilidades, α e β, são próximas de zero.
- No entanto, à medida que diminuimos α, a probabilidade β tende a aumentar.
- Levando isso em conta, ao formular as hipóteses, **devemos cuidar para que o erro (usualmente) mais importante a ser evitado seja o erro do tipo I**.
- Por isso, a probabilidade α recebe o nome de **nível de significância** do teste, e é esse erro que devemos controlar.

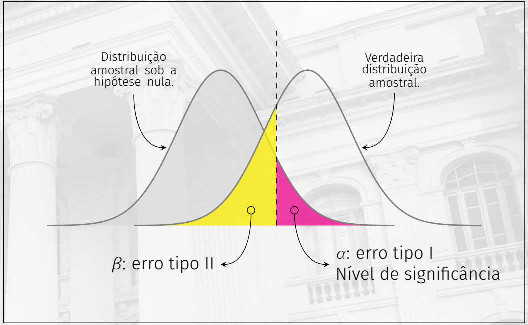

Figura 4. Probabilidade dos tipos de erros em testes de hipótese.

Procedimentos gerais para um teste de hipótese

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir um nível de significância α, que irá determinar o nível de confiança $100(1 - \alpha)\%$ do teste.
3. **Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa**.
4. Calcular a estatística de teste, com base na distribuição amostral do estimador do parâmetro sob teste $\to$ valor calculado.
5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α $\to$ valor crítico.
6. Concluir o teste.

3. Tipos de testes

A hipótese alternativa determinará o **sentido** do teste de hipótese, que pode ser:

- Bilateral:

$$H_a : \theta \neq \theta_0.$$

- Unilateral à esquerda:

$$H_a : \theta < \theta_0.$$

- Unilateral à direita:

$$H_a : \theta > \theta_0.$$

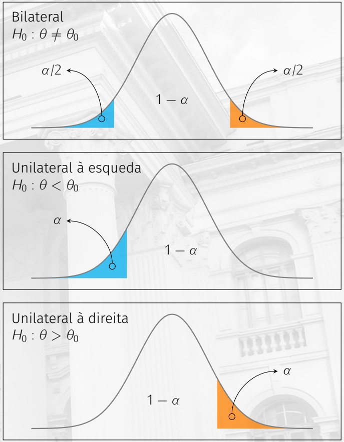

Figura 5. A região de rejeição de H_0 conforme o tipos de hipótese alternativa.

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Uma hipótese do tipo

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_a : \theta \neq \theta_0$$

é **bilateral**.

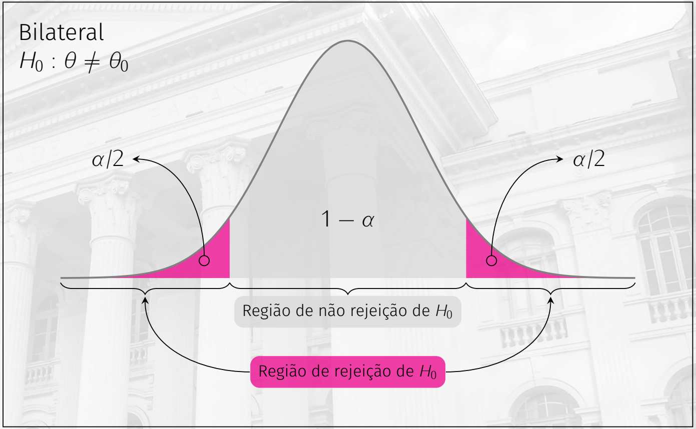

Figura 6. A região de rejeição de H_0 para uma hipótese alternativa bilateral.

3. Tipos de testes · unilateral à esquerda

Uma hipótese do tipo

$$H_0 : \ \theta = \theta_0$$
$$H_a : \ \theta < \theta_0$$

é **unilateral à esquerda**.

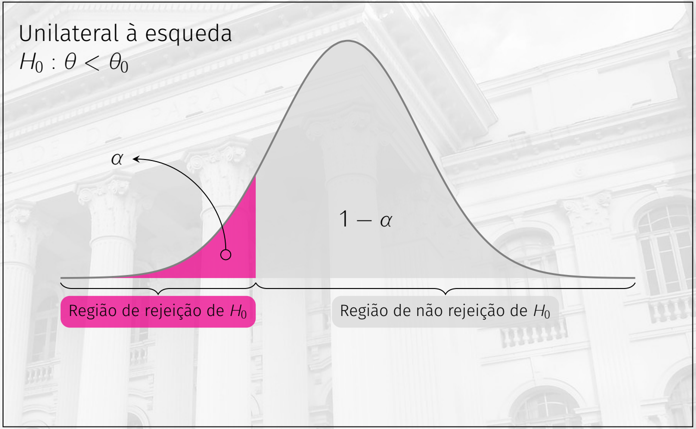

Figura 7. A região de rejeição de H_0 para uma hipótese alternativa unilateral à esquerda.

3. Tipos de testes · unilateral à direita

Uma hipótese do tipo

$$H_0: \theta = \theta_0$$
$$H_a: \theta > \theta_0$$

é **unilateral à direita**.

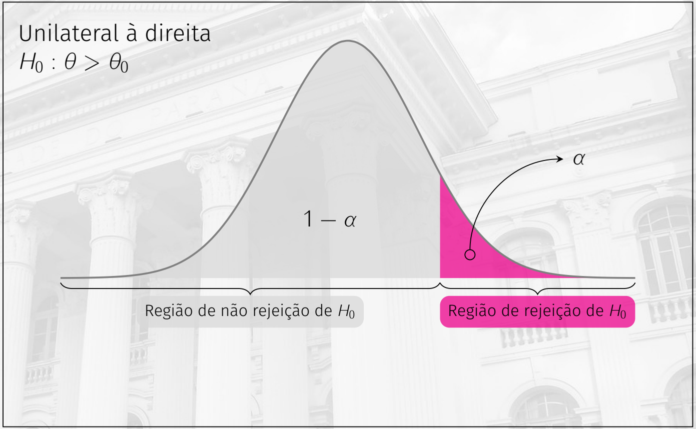

Figura 8. A região de rejeição de H_0 para uma hipótese alternativa unilateral à direita.

Procedimentos gerais para um teste de hipótese

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir um nível de significância α, que irá determinar o nível de confiança $100(1-\alpha)\%$ do teste.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. **Calcular a estatística de teste, com base na distribuição amostral do estimador do parâmetro sob teste** $\rightarrow$ **valor calculado**.
5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α $\rightarrow$ valor crítico.
6. Concluir o teste.

4. Estatística de teste

A **estatística de teste** é um valor usado para tomar a decisão sobre a hipótese nula, supondo que ela seja verdadeira.

Considera a distribuição amostral do estimador **sob a hipótese nula**.

Estatística de teste para a **média** (μ)

$$z = \frac{\overline{y} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{ou} \quad t = \frac{\overline{y} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}.$$

Estatística de teste para a **proporção** (p)

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}.$$

Estatística de teste para a **variância** (σ^2)

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}.$$

Procedimentos gerais para um teste de hipótese

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir um nível de significância α, que irá determinar o nível de confiança $100(1-\alpha)\%$ do teste.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a estatística de teste, com base na distribuição amostral do estimador do parâmetro sob teste $\rightarrow$ valor calculado.
5. **Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância** $\alpha \rightarrow$ **valor crítico**.
6. Concluir o teste.

5. Região crítica · definição

- A estatística de teste **sozinha** não nos dá informação suficiente para a tomada de decisão sobre a afirmativa em um teste.
- É necessário comparar esta estatística com algum **valor de referência**, que nos informe o quão extrema é a estatística de teste para rejeição de H_0.
- Este valor de referência é chamado de **valor crítico**, que divide a região de rejeição da região de não rejeição da hipótese nula. Depende:
  - Da distribuição amostral da estatística de teste sob H_0.
  - Do nível de significância α.
- A **região crítica** de um teste de hipótese é a **região de rejeição** da hipótese nula.

5. Região crítica · exemplos

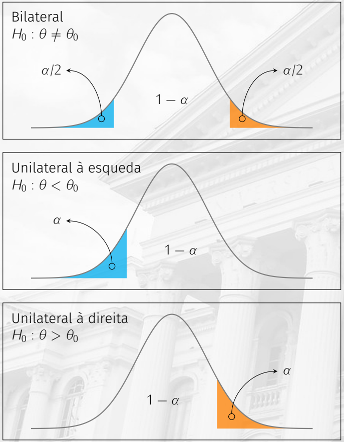

Figura 9. A região de rejeição de H_0 conforme o tipos de hipótese alternativa.

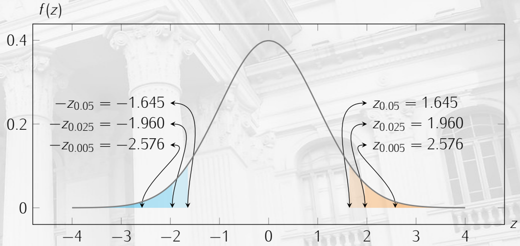

Figura 10. Valores críticos para determinar a região crítica.

Procedimentos gerais para um teste de hipótese

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir um nível de significância α, que irá determinar o nível de confiança $100(1-\alpha\%)$ do teste.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a estatística de teste, com base na distribuição amostral do estimador do parâmetro sob teste $\rightarrow$ valor calculado.
5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α $\rightarrow$ valor crítico.
6. **Concluir o teste**.

6. Conclusão do teste · valor da estatística

Com base na estatística de teste e valor crítico

- Se a estatística de teste estiver **dentro** da região crítica → **rejeita** H_0.
- Se a estatística de teste estiver **fora** da região crítica → **não rejeita** H_0.

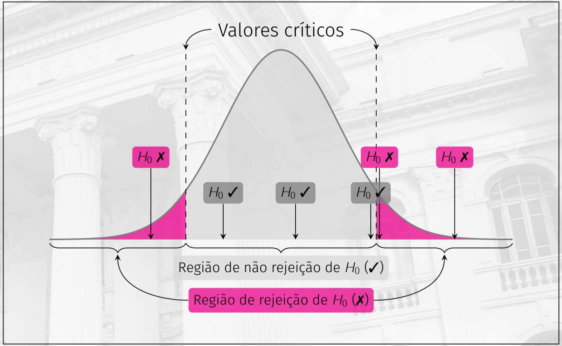

Figura 11. Decisões conforme o valor da estatística de teste.

Com base no nível descritivo ou p-valor

- Em geral, α é pré-fixado para construir a regra de decisão.
- Uma alternativa é deixar em aberto a escolha de α para quem for tomar a decisão.
- A ideia é calcular, **supondo que a hipótese nula é verdadeira**, a probabilidade de se obter **estatísticas mais extremas** do que aquela fornecida pela amostra.
- Essa probabilidade é chamada de **nível descritivo**, denotada por α^* (ou p-**valor**).
- Valores pequenos de α^* **evidenciam** que a hipótese nula é falsa.
- O conceito de "pequeno" **fica para quem decide** qual α deve usar para comparar com α^*.

6. Conclusão do teste · ilustração do caso unilateral

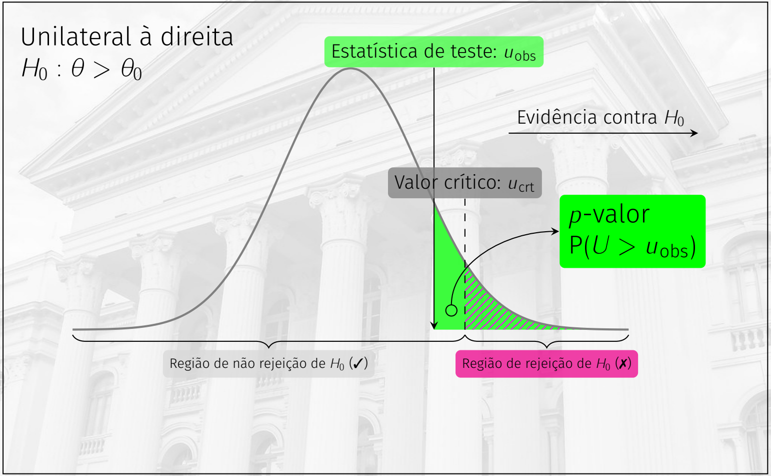

Figura 12. Nível descritivo para um teste com hipótese unilateral à direita.

6. Conclusão do teste · ilustração do caso bilateral

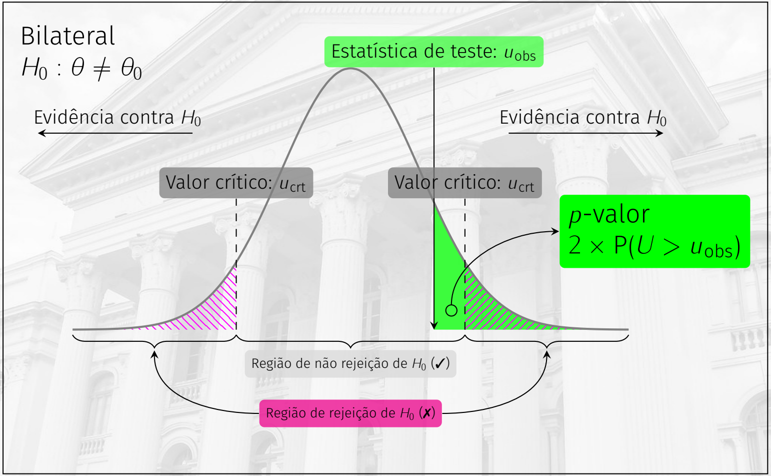

Figura 13. Nível descritivo para um teste com hipótese bilateral.

6. Conclusão do teste · formalização do p-valor

Com base no nível descritivo ou p-valor

Para **testes unilaterais**, sendo $H_0 : \theta = \theta_0$, a expressão de α^* depende da hipótese alternativa:

$$\alpha^* = \mathrm{P}(U < u_{\text{obs}} \,|\, H_0 \text{ verdadeira}) \quad \text{para } H_a : \theta < \theta_0$$
$$\alpha^* = \mathrm{P}(U > u_{\text{obs}} \,|\, H_0 \text{ verdadeira}) \quad \text{para } H_a : \theta > \theta_0,$$

em que U é a estatística de teste, u_{obs} o seu valor observado.

Para **testes bilaterais**, temos $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_0 : \theta \neq \theta_0$, a definição do nível descritivo depende da relação entre u_{obs} e θ_0:

$$\alpha^* = 2 \times \mathrm{P}(U < u_{\text{obs}} \,|\, H_0 \text{ verdadeira}) \quad \text{se } u_{\text{obs}} < \theta_0$$
$$\alpha^* = 2 \times \mathrm{P}(U > u_{\text{obs}} \,|\, H_0 \text{ verdadeira}) \quad \text{se } u_{\text{obs}} > \theta_0.$$

Como estamos calculando a probabilidade para apenas uma das caudas, então esse valor é multiplicado por 2.

Relação de teste de hipótese com intervalo de confiança

Seja $IC_{1-\alpha}(\theta)$ o **intervalo de confiança** de $100(1-\alpha)\%$ para o parâmetro θ.

O **teste de hipótese** com nível de significância α para

$$H_0: \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_a: \theta \neq \theta_0$$

conduzirá à rejeição de H_0, se e somente se, θ_0 **não** estiver contido no $IC_{1-\alpha}(\theta)$.

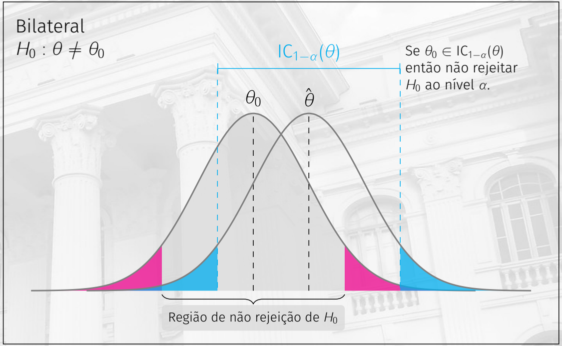

Figura 14. Relação entre teste de hipótese e intervalo de confiança.

Resumo da unidade

- Testes de hipótese são ferramentas estatísticas para **tomada de decisão sob incerteza**.
- Os **procedimentos gerais** para a realização de qualquer teste serão sempre os **mesmos**.
- Os testes de hipótese são estritamente **relacionados** com os intervalos de confiança.

Estrutura da unidade

- **Fundamentos de testes de hipóteses.**
  - **Hipóteses estatísticas.**
    - **Significância e tipos de erro.**
    - **Tipos de testes.**
    - **Estatísticas de teste.**
    - **Nível descritivo (p-valor).**
- Testes para médias.
- Testes para variâncias.
- Testes para proporções.

Figura 15. Foto de James Wheeler no Pexels.

Testes de hipótese para médias, proporções e variâncias

Prof. Paulo Justiniano Ribeiro Junior

Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

Tópicos

- Fundamentos de testes de hipóteses.
- **Testes para uma população.**
  - **Teste para média.**
  - **Teste para proporção.**
  - **Teste para variância.**
- Outros testes
- **Testes para comparar duas populações.**
  - **Teste para duas médias.**
  - **Teste para duas proporções.**
  - **Teste para duas variâncias.**

Testes de hipótese para uma população

Quando queremos fazer inferência para um parâmetro de uma única população.

- Testar se a média de altura dos estudantes da UFPR é igual a 170 cm ($\mu = 170$ de uma distribuição normal).
  - Testes para a **média** de uma população.
    - σ^2 conhecido.
    - σ^2 desconhecido.
- Testar se a proporção de peixes fêmeas em uma lagoa é de 50% ($p = 0.5$ de uma distribuição Bernoulli).
  - Teste para a **proporção** de uma população.
- Testar se a variabilidade do diâmetro de um lote de parafusos se mantém em torno de 0.02 mm ($\sigma = 0.02$ de uma distribuição normal).
  - Teste para a **variância** de uma população.

Testes de hipótese para duas populações

Quando queremos comparar parâmetros de duas populações.

- Testar se IRA dos estudantes da UFPR difere entre alunos e alunas ($\mu_M = \mu_F$ de distribuições normais).
  - Testes para comparar **médias** de duas populações.
    - σ^2 conhecidos.
    - σ^2 desconhecido(s) (pareadas/independentes; iguais/diferentes).
- Testar se as proporções de pacientes recuperados são distintas entre dois tratamentos ($p_1 = p_2$ de distribuições Bernoulli).
  - Teste para comparar duas **proporções**.
- Testar se a variabilidade do diâmetro parafusos difere entre dois fornecedores ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ de duas distribuições normais).
  - Teste para comparar **variâncias** de uma população.

Procedimentos gerais para um teste de hipótese

Em qualquer tipo de teste, os passos serão sempre os mesmos

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir um nível de significância α, que irá determinar o nível de confiança $100(1-\alpha)\%$ do teste.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a **estatística de teste**, com base na sua distribuição amostral sob a hipótese nula $\rightarrow$ valor calculado.
5. Determinar a região crítica (região de rejeição) na sua distribuiçõa amostral, sob hipótese nula, com base no nível de significância $\alpha \rightarrow$ valor crítico.
6. Conclusão.

Testes de hipótese para a média μ: (σ^2 conhecido)

Condições para o teste

Quando temos os seguintes requisitos:

- Temos uma AAS.
- σ^2 é conhecido.
- A população tem distribuição Normal ou $n > 30$.

Podemos usar o Teorema do Limite Central para afirmar que a média segue distribuição Normal, e a **estatística de teste** é dada por

$$z = \frac{\overline{y} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}},$$

em que μ_0 é o valor de teste sob a hipótese nula.

Etapas do teste

Procedimentos gerais para um teste de hipótese para a média μ com σ^2 conhecido:

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir o nível de significância α.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a estatística de teste
$$z = \frac{\overline{y} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$
5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α.
6. Conclusões.

Exercício: enchimento de embalagens

- Uma máquina de encher embalagens de café está funcionando adequadamente se colocar 700 g em cada embalagem.
- Para verificar a calibração da máquina, foi coletada uma amostra de 40 embalagens, que resultou em uma média de 698 g.
- Sabe-se que o desvio-padrão do enchimento da máquina é de 10 g.
- Teste a hipótese de o peso médio das embalagens na população ser 700 g, com um nível de significância de 5%.

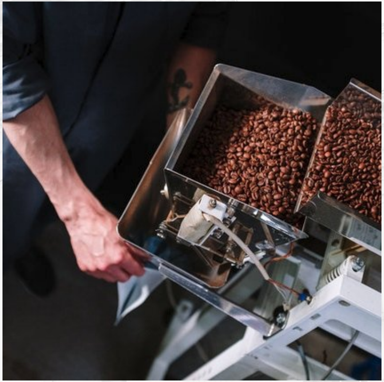

Figura 1. Foto de cottonbro no Pexels.

Solução

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a): $H_0 : \mu = 700 \quad \text{vs} \quad H_a : \mu \neq 700$.
2. Definir o nível de significância: $\alpha = 0.05$.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa: *teste bilateral*.
4. Calcular a estatística de teste

$$z = \frac{\overline{y} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{698 - 700}{10/\sqrt{40}} = -1.265.$$

5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α.

$$\text{RC} = \{z < -1.96 \text{ ou } z > 1.96\}.$$

6. Conclusão: $z \notin \text{RC}$, portanto **não rejeita** H_0.

Nível descritivo do teste

p-valor do teste:

$$2 \times P(Z < -1.265) = 2 \times 0.103 = 0.206.$$

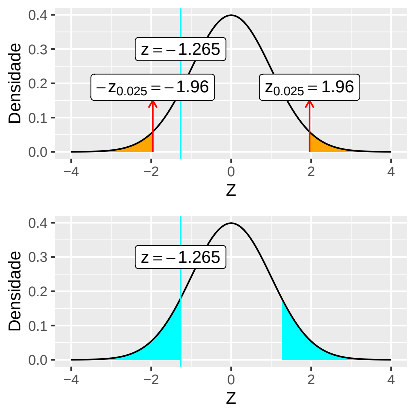

Figura 2. Região de rejeição da hipótese nula e nível descritivo.

Exercício: resistência das lajotas

- Um fabricante de lajotas introduz um novo material em sua fabricação e acredita que aumentará a resistência média, que é de 206 kg.
- A resistência das lajotas tem distribuição normal com desvio-padrão de 12 kg.
- Retirou-se uma amostra de 30 lajotas, e obteve-se uma média amostral de 210 kg.
- Ao nível de 10%, pode o fabricante afirmar que a resistência média de suas lajotas tenha aumentado?

Figura 3. Foto de Rodolfo Quirós no Pexels.

Solução

1. Hipóteses: $H_0 : \mu = 206 \quad \text{vs} \quad H_a : \mu > 206$ (teste unilateral à direita).
2. Estatística de teste

$$z = \frac{\bar{y} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{210 - 206}{12/\sqrt{30}} = 1.826.$$

3. Nível de significância $\alpha = 0.1 \rightarrow \text{RC} = \{z > 1.282\}$.
4. Conclusão do teste:
   - $z \in \text{RC}$, portanto **rejeita** H_0.
   - **p-valor** $= P(Z > 1.826) = 0.034$: probabilidade muita baixa de valor tão ou mais extremo que a média amostral ocorrer por acaso.
     Portanto, existem evidências de que a resistência média das lajotas tenha aumentado.

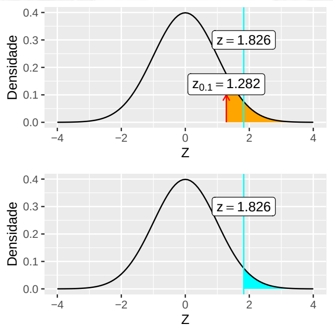

Figura 4. Região de rejeição da hipótese nula e nível descritivo.

Testes de hipótese para a média μ: (σ^2 desconhecido)

Condições para o teste

Quando temos os seguintes requisitos:

- Temos uma AAS.
- σ^2 é **desconhecido**.
- A população tem distribuição Normal ou $n > 30$.

Podemos usar o Teorema do Limite Central para afirmar que a média segue uma distribuição Normal, e a **estatística de teste** é dada por

$$t = \frac{\overline{y} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_\nu,$$

com $\nu = n - 1$ graus de liberdade, e onde μ_0 é o valor de teste na hipótese nula.

Etapas do teste

Procedimentos gerais para um teste de hipótese para a média μ com σ desconhecido:

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir o nível de significância α.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a estatística de teste
$$t = \frac{\overline{y} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}.$$
5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α.
6. Conclusões.

Exercício: uso do cartão de crédito

Um estudo foi idealizado para estimar a média anual dos débitos de cartão de crédito da população de famílias brasileiras. Uma amostra de $n = 15$ famílias forneceu média de saldos de R$ 5200.00 e o desvio padrão foi de R$ 3058.00.

1. Obtenha um intervalo com 95% de confiança.
2. Teste a hipótese de que a média anual de débitos é de R$ 6000.00, com o mesmo nível de confiança.

Figura 5. Foto de Norma Mortenson no Pexels.

Solução

O intervalo de confiança é obtido por

$$\text{IC}_{1-0.95}(\mu) = \left(5200 \pm 2.145 \cdot \frac{3058}{\sqrt{15}}\right) \approx (3506.4, 6893.6).$$

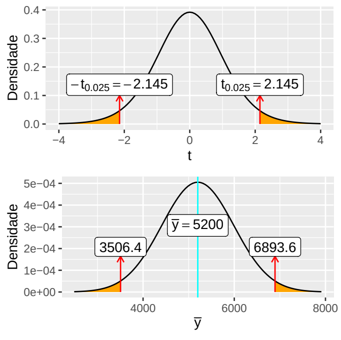

Figura 6. Quantis da distribuição t-Student e intervalo de confiança para a média.

Solução

1. Hipóteses: $H_0 : \mu = 6000 \quad \text{vs} \quad H_a : \mu \neq 6000$ (teste bilateral).
2. Estatística de teste

$$t = \frac{5200 - 6000}{3058/\sqrt{15}} = -1.013.$$

3. Nível de significância $\alpha = 0.05$

$$\text{RC} = \{t < -2.145 \text{ ou } t > 2.145\}.$$

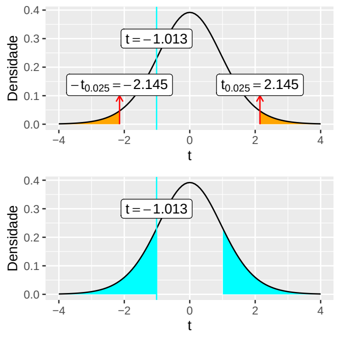

Figura 7. Resultado do teste de hipótese.

Solução

4. Conclusão do teste:
   - $t \notin$ RC, portanto **não rejeita** H_0.
   - **p-valor** $= 2 \times \mathrm{P}(T < -1.013) = 2 \times 0.164 = 0.328$: probabilidade alta de ocorrência de um valor médio tão ou mais extremo do que o obtido nesta amostra (assumindo que o valor populacional é de R$ 6000.00).
     Portanto, não existe evidência de que a média de débitos seja diferente de R$ 6000.00.

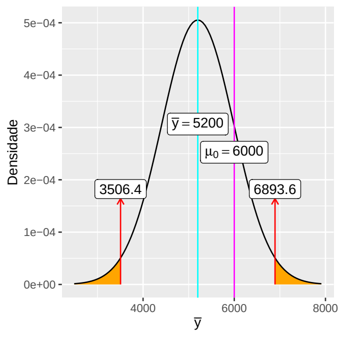

Figura 8. Intervalo de confiança para a média.

Note que o $\mathrm{IC}_{1-\alpha}(\mu)$ contém o valor sob hipótese nula, ou seja, $H_0 : \mu = 6000$.

Testes de hipótese para a proporção p

A distribuição amostral

Se $Y \sim \text{Ber}(p)$, então a proporção amostral

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

é a **melhor estimativa** para a proporção populacional p.

Já vimos que, quando ambas condições são satisfeitas,

- $np \geq 5$
- $n(1-p) \geq 5$,

a distribuição amostral de $\hat{p}$ pode ser aproximada (pelo TLC) por

$$\hat{p} \overset{\text{aprox}}{\sim} \text{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right).$$

Condições para o teste

Quando temos os seguintes requisitos:

- Temos uma AAS.
- As condições para a distribuição Binomial são satisfeitas:
  - As tentativas são independentes.
  - Há duas categorias de resultado (“sucesso”, “fracasso”).
  - A probabilidade de sucesso p permanece constante.
- $np_0 \geq 5$ e $n(1 - p_0) \geq 5$.

Podemos usar a distribuição Normal como aproximação da Binomial e, portanto, usamos a **estatística de teste**

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}},$$

em que p_0 é o valor de proporção de teste na hipótese nula.

Etapas do teste

Procedimentos gerais para um teste de hipótese para a proporção p

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir o nível de significância α.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a estatística de teste

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}.$$

5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α.
6. Conclusão.

Exemplo

- Uma empresa desenvolveu uma nova vacina para uma doença, e afirma que a proporção de imunizados é maior do que 50%.
- Em uma amostra de 726 pessoas que tomaram a vacina, 668 estavam imunizadas.
- Use este resultado, com um nível de significância de 5%, para testar a afirmativa de que a proporção de imunizados é maior do que 50%.

Figura 9. Foto de cottonbro no Pexels.

Solução

1. Hipóteses: $H_0 : p = 0.5 \quad \text{vs} \quad H_a : p > 0.5$ (teste unilateral à direita).
2. Estatística de teste

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.92 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{726}}} = 22.633.$$

3. Nível de significância $\alpha = 0.05 \rightarrow \text{RC} = \{z > 1.645\}$.
4. Conclusão do teste:
   - $z \in \text{RC}$, portanto **rejeita** H_0.
   - **p-valor** $= \text{P}(Z > 22.633) \approx 0$: a probabilidade de ocorrência **ao acaso** de uma proporção tão ou mais extrema do que essa é praticamente nula. Portanto, existem fortes evidências de que a vacina imuniza mais que 50%.

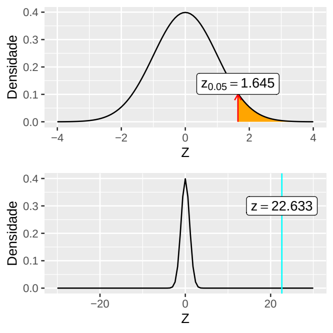

Figura 10. Região de rejeição da hipótese nula e nível descritivo.

Exemplo (cont.)

- Ainda no contexto da vacina, acredita-se que, devido ao seu alto custo, seu uso só seria viável se pelo menos 90% das pessoas forem imunizadas.
- Neste caso, qual seria a decisão sobre a adoção da vacina, com um nível de significância de 5%.

Figura 11. Foto de cottonbro no Pexels.

Solução

1. Hipóteses: $H_0 : p = 0.9 \quad \text{vs} \quad H_a : p > 0.9$ (teste unilateral à direita).
2. Estatística de teste

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.92 - 0.9}{\sqrt{\frac{0.9(1-0.9)}{726}}} = 1.796.$$

3. Nível de significância $\alpha = 0.05 \rightarrow \text{RC} = \{z > 1.645\}$.
4. Conclusão do teste:
   - $z \in \text{RC}$, portanto **rejeita** H_0.
   - **p-valor** $= \text{P}(Z > 1.796) = 0.036$: portanto, existe evidência, a este nível de significância, de que a adoção da vacina seria viável.

OBS: E se fosse adotado $\alpha = 0.01$ ($\text{RC} = \{z > 2.326\}$)?

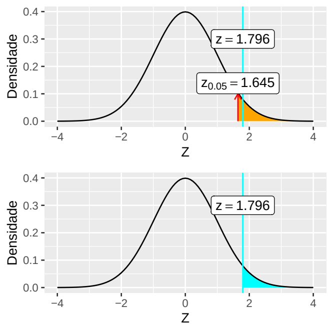

Figura 12. Região de rejeição da hipótese nula e nível descritivo.

Teste de hipótese para a variância σ^2

Condições para o teste

Quando temos os seguintes requisitos:

- Temos uma AAS.
- A população tem distribuição Normal (essa é uma exigência mais estrita).

Então, usamos a **estatística de teste**

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2},$$

em que σ_0^2 é o valor de variância na hipótese nula.

Etapas do teste

Procedimentos gerais para um teste de hipótese para a variância σ^2

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir o nível de significância α.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a estatística de teste
$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}.$$
5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α.
6. Conclusão.

Exemplo: concentração de princípio ativo

Na indústria, baixa variabilidade é sinônimo de qualidade. Para isso, constantemente monitora-se e corrige-se a produção para manter níveis aceitáveis de qualidade.

Uma amostra de frascos de medicamento foi inspecionada em relação à concentração (m/m) de princípio ativo na solução. O lote é rejeitado se claramente ultrapassar o limite de $\sigma^2 = 0.0009$. Os dados estão abaixo.

0.15	0.18	0.18	0.20	0.21	0.22	0.25	0.27
0.17	0.18	0.19	0.20	0.21	0.22	0.26	0.27

Faça um teste para verificar se a variância é maior do que 0.0009, com $\alpha = 5\%$.

Figura 13. Foto de Karolina Grabowska no Pexels.

Solução

1. Hipóteses: $H_0 : \sigma^2 = 0.0009 \quad \text{vs} \quad H_a : \sigma^2 > 0.0009$ (teste unilateral à direita).
2. Estatística de teste

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(16-1)0.0013}{0.0009} = 21.667.$$

3. Nível de significância $\alpha = 0.05 \to \text{RC} = \{\chi^2 > 24.996\}$.
4. Conclusão do teste:
   - $\chi^2 \notin \text{RC}$, portanto **não rejeita** H_0.
   - **p-valor** $= \text{P}(\chi^2 > 21.667) = 0.117$: portanto, ao nível de 5% de significância, **não se rejeita** a hipótese de que a variância seja igual a 0.0009.

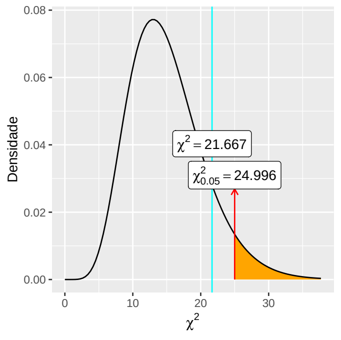

Figura 14. Região de rejeição da hipótese nula.