Exercícios de Cadeia de Markov

6 de setembro de 2012

1 Meteorologia

Suponha que o tempo possa ser apenas ensolarado ou nublado e as condições meteorológicas de sucessivas manhãs formam uma cadeia de Markov com probabilidade de transição estacionária. Suponha que a matriz seja dada por:

```
> M
```

```
    S   N
S 0.7 0.3
N 0.6 0.4
```

Sendo que S representa os dias ensolarados, e N representa os dias nublados.

- Se estivesse nublado em um determinado dia, qual é a probabilidade de que ele também estará nublado no dia seguinte?

  $P(X_{n+1} = N|X_n = N) =?$

  Portanto, o vetor de probabilidades é:

  ```
  > v
  ```

  ```
  [1] 0 1
  ```

  Multiplicando o vetor de probabilidades pela matriz de transição:

  ```
  > vM
  ```

  ```
  [1] 0.4
  ```

  Então, a solução é:

  $P(X_{n+1} = N|X_n = N) =$

  ```
  > vM
  ```

  ```
  [1] 0.4
  ```

- Se estiver ensolarada em um determinado dia, qual é a probabilidade de que os próximos 2 dias estejam ensolarados?

  $P(X_{n+1} = S, X_{n+2} = S|X_n = S) = P(X_{n+2} = S|X_{n+1} = S, X_n = S) * P(X_{n+1} = S|X_n = S) + P(X_{n+2} = S|X_{n+1} = N, X_n = S) * P(X_{n+1} = N|X_n = S)$

  ```
  > v1
  ```

  ```
  [1] 1 0
  ```

```
> M2
[1] 0.49
```

- Se estiver nublado em um determinado dia, qual é a probabilidade de que estará ensolarado, pelo menos em 1 dos próximos 3 dias?

  Temos que:

  Probabilidade de estar ensolarado, pelo menos em 1 dos próximos 3 dias $= 1 - P[N_1 \cap N_2 \cap N_3 | N] = 1 - 0.334 = 0.666$

```
> v3
[1] 0 1
[1] 0.334
> M3
[1] 0.334
> 1-M3
[1] 0.666
```

- Se uma certa quarta-feira estiver ensolarada, qual é a probabilidade de que o sábado seguinte estará ensolarado?

  $P[X_{n+3} = S | X_n = S] =?$

```
> v4
[1] 1 0
> M4
[1] 0.667
```

- Se uma certa quarta-feira estiver nublada , qual é a probabilidade de que o sábado seguinte esteja ensolarado?

  $P[X_{n+3} = S | X_n = S] = 0.666$

```
> v5
[1] 0 1
> M5
[1] 0.334
```

- Se uma certa quarta-feira estiver ensolarada, qual é a probabilidade de que sábado e domingo também estejam ensolarados?

```
> v
[1] 1 0
> M9 <- sum(v%*%M%*%M%*%M*t(v))*sum(v%*%M*t(v))
```

```
> M9
```

```
[1] 0.4669
```

- Se uma certa quarta-feira estiver nublada, qual é a probabilidade de que sábado e domingo também estejam ensolarados?

```
> v
```

```
[1] 0 1
```

```
> v1
```

```
[1] 1 0
```

```
> M10 <- sum(v%*%M%*%M%*%M*t(v1))*sum(v1%*%M*t(v1))
```

```
> M10
```

```
[1] 0.4662
```

- **Agora, suponha que a probabilidade de que certa quarta-feira será ensolarada é** 0.2 **e que a probabilidade de que seja nublada é** 0.8
- Determine a probabilidade de que quinta seja nublada:

```
> M
```

```
    S   N
S 0.7 0.3
N 0.6 0.4
```

```
> vi
```

```
[1] 0.2 0.8
```

```
> M6
```

```
[1] 0.38
```

$P[X_{n+1}|S] + P[X_{n+1}|N] = 0.38$

- Determine a probabilidade de que sexta estará nublada.

  Da mesma forma que no item anterior, porém, agora temos 2 estágios de tempo:

```
> M7
```

```
[1] 0.338
```

$P[X_{n+2}|S] + P[X_{n+1}|N] = 0.338$

- Determine a probabilidade de que sábado estaja nublado.

```
> M8
```

```
[1] 0.3338
```

$P[X_{n+3}|S] + P[X_{n+3}|N] = 0.3338$

2 Problema de linhas ocupadas

Suponha que em certo escritório existam cinco linhas telefônicas e que qualquer número dessas linhas possa estar em uso em qualquer tempo dado. Durante certo período de tempo as linhas telefônicas são observadas em intervalos regulares de dois minutos e o número de linhas ocupadas/utilizadas a cada período é anotado. A sequência dessas observações é chamada de processo estocástico ou processo aleatório porque os valores dessas observações não podem ser antecipadamente previstas com precisão, mas as probabilidades podem ser especificadas para cada uma das diferentes possibilidades a cada tempo.

Os números de linhas sendo utilizadas nos tempos 1,2,... formam uma cadeia de Markov com probabilidades de transição estacionárias. Essa cadeia tem cinco possíveis estados $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$, onde b_i é o estado no qual exatamente i linhas estão sendo usadas em um dado tempo ($i = 0, 1, ..., 5$). Suponha que a matriz de transição A é a seguinte:

```
> A

    0   1   2   3   4   5
0 0.1 0.4 0.2 0.1 0.1 0.1
1 0.2 0.3 0.2 0.1 0.1 0.1
2 0.1 0.2 0.3 0.2 0.1 0.1
3 0.1 0.1 0.2 0.3 0.2 0.1
4 0.1 0.1 0.1 0.2 0.3 0.2
5 0.1 0.1 0.1 0.1 0.4 0.2
```

Assumindo que todas as cinco linhas estão em uso em um determinado tempo observado, deve-se determinar a probabilidade de que exatamente quatro linhas estarão em uso no próximo tempo de observação. Essa probabilidade é o elemento na matriz A na linha correspondente ao estado b_5 e coluna correspondente ao estado b_4, sendo o valor igual a $0,4$.

Assumindo 5 linhas em uso no tempo presente eliminamos as demais linhas da matriz pelo vetor:

```
> (v1 <- c(0, 0, 0, 0, 0, 1))

[1] 0 0 0 0 0 1
```

Para determinar a probabilidade de 4 linhas estarem em uso multiplica-se pelo vetor:

```
> (v2 <- c(0, 0, 0, 0, 1, 0))

[1] 0 0 0 0 1 0
```

Resultando em:

```
> (round((v1 %*% A %*% v2),1))

     [,1]
[1,]  0.4
```

Assumindo que nenhuma linha está em uso em certo período, deve-se determinar a probabilidade de que pelo menos uma linha esteja em uso no próximo período de observação. Se nenhuma linha está em uso em um dado tempo, então o elemento no canto esquerdo superior da matriz A dá a probabilidade de que nenhuma linha estará em uso no próximo período de observação, sendo este valor 0.1. Dessa forma, a probabilidade de que pelo menos uma linha estará em uso no próximo período de observação é $1 - 0,1 = 0,9$. Ou de forma matricial: Probabilidade de nenhuma linha em uso, com a multiplicação pelo vetor $v3$ resta apenas a primeira linha:

```
> (v3<- c(1, 0, 0, 0, 0, 0))

[1] 1 0 0 0 0 0
```

Probabilidade de pelo menos uma estar em uso, multiplica a matriz linha resultante da operação anterior pelo vetor $v4$:

```
> (v4<- c(0, 1, 1, 1, 1, 1))

[1] 0 1 1 1 1 1

> (round((v3 %*% A %*% v4),1))

     [,1]
[1,]  0.9
```

Ainda considerando a matriz de transição A dada acima, deve-se assumir primeiramente que i linhas estão em uso em dado período e deve-se determinar a probabilidade de exatamente j linhas estarem em uso dois períodos de tempo depois. Multiplicando a matriz A por ela mesma, obtém-se a seguinte matriz de transição de dois passos:

```
> A2 <- (round((A %*% A),4))
```

A partir dessa matriz pode-se encontrar qualquer probabilidade de transição de dois passos para a cadeia:

- Se duas linhas estão em uso em certo tempo, então a probabilidade de que quatro linhas estejam em uso dois períodos de tempo depois é 0,17.

  ```
  > (v5<- c(0, 0, 1, 0, 0, 0))

  [1] 0 0 1 0 0 0

  > (v6<- c(0, 0, 0, 0, 1, 0))

  [1] 0 0 0 0 1 0

  > (round((v5 %*% A %*% A %*% v6), 2))

       [,1]
  [1,] 0.17
  ```

- Se três linhas estão em uso em certo tempo então a probabilidade de que três linhas estejam em uso novamente dois períodos de tempo depois é de 0,20.

  ```
  > (v7<- c(0, 0, 0, 1, 0, 0))

  [1] 0 0 0 1 0 0

  > (round((v7 %*% A %*% A %*% v7), 2))

       [,1]
  [1,]  0.2
  ```

Deve-se agora assumir que i linhas estejam em uso em um dado tempo e deve-se determinar a probabilidade de que exatamente j linhas estejam em uso três períodos de tempo depois. Construindo a matriz $P^3 = P^2P$ obtém-se a seguinte matriz de transição de três passos:

```
> A3 <- (round((A%*% A %*% A),4))
```

Desta matriz pode-se encontrar qualquer probabilidade de transição de três passos para a cadeia:

- Se todas as cinco linhas estão em uso em certo tempo, então a probabilidade de que nenhuma linha esteja em uso três períodos de tempo depois é $0,116$.

```
> (round((v1 %*% A2 %*% A %*% v3),4))

      [,1]
[1,] 0.116
```

- Se nenhuma linha está em uso em certo tempo então a probabilidade de que exatamente nenhuma linha esteja em uso novamente três períodos de tempo depois é de $0,207$.

```
> (v8<- c(0, 1, 0, 0, 0, 0))

[1] 0 1 0 0 0 0

> (round((v8 %*% A2 %*% A %*% v8),4))

      [,1]
[1,] 0.207
```

A matriz de transição deste exemplo é ergódica, pois possui as seguintes propriedades:

- Recorrente, pois entrando nesse estado, com certeza o processo retornará a este em algum outro momento, independente do passo;
- Aperiódica, pois não há uma ordenação para que cada estado se repita;
- Comunicável, pois o estado i é alcançável a partir do estado j, e vice-versa.

Continuando a multiplicação das matrizes de modo a avançar no passo:

```
> A30 <- lapply(seq(30), function(x){return(A)})
> (A30 <- round(Reduce("%*%", A30),4))

       0      1      2      3      4      5
0 0.1193 0.1929 0.1856 0.1728 0.1964 0.1329
1 0.1193 0.1929 0.1856 0.1728 0.1964 0.1329
2 0.1193 0.1929 0.1856 0.1728 0.1964 0.1329
3 0.1193 0.1929 0.1856 0.1728 0.1964 0.1329
4 0.1193 0.1929 0.1856 0.1728 0.1964 0.1329
5 0.1193 0.1929 0.1856 0.1728 0.1964 0.1329
```

Pode-se observar uma convergência dos valores de cada coluna ao longo dos passos, no momento em que as linhas ficam iguais alcança-se o estado estável.

Supondo que no início do processo de observação no tempo $n = 1$, a probabilidade de que nenhuma linha esteja em uso é de $0,5$, a probabilidade de que uma linha será utilizada é de $0,3$ e a probabilidade de que duas linhas serão utilizadas é de $0,2$. Então o vetor de probabilidade inicial é $v_0 = (0.5, 0.3, 0.2, 0, 0, 0)$.

```
> (v0 <- c(0.5,0.3,0.2,0.0,0.0,0.0))

[1] 0.5 0.3 0.2 0.0 0.0 0.0
```

Deve-se primeiramente determinar a probabilidade de que exatamente j linhas estarão em uso no tempo dois, um período depois. Multiplicando este vetor pela matriz de transição, obtém-se:

```
> (vA <- v0 %*% A)

        0    1    2    3   4   5
[1,] 0.13 0.33 0.22 0.12 0.1 0.1
```

Uma vez que o primeiro componente do vetor de probabilidade é $0,13$, a probabilidade de que nenhuma linha estará em uso no tempo dois é $0,13$; sendo o segundo componente $0,33$, a probabilidade de que exatamente uma linha estará em uso no tempo dois é $0,33$; e assim por diante.

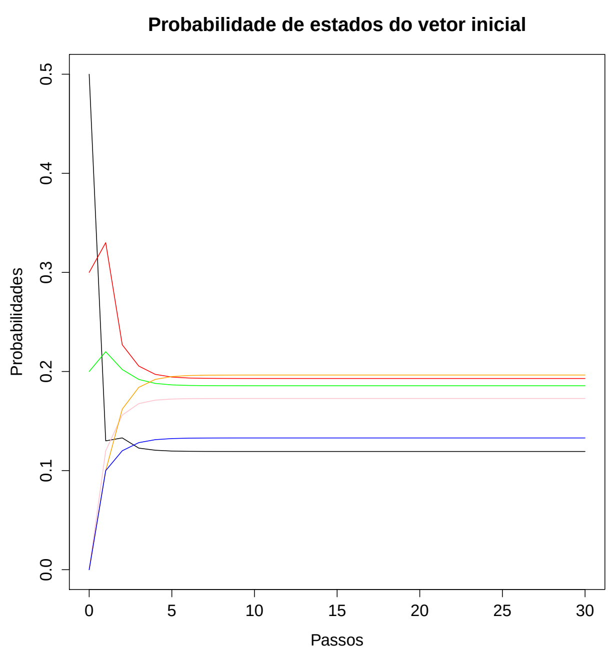
Em seguida, para determinar a probabilidade de que exatamente j linhas estarão em uso no tempo três, utiliza-se:

```
> (vA2 <- v0 %*% A %*% A)
```

```
         0     1     2     3     4    5
[1,] 0.133 0.227 0.202 0.156 0.162 0.12
```

Uma vez que o primeiro componente do vetor de probabilidade é $0,133$, a probabilidade de que nenhuma linha estará em uso no tempo três é $0,133$; sendo o segundo componente $0,227$, a probabilidade de que exatamente uma linha estará em uso no tempo três é $0,227$; e assim por diante.

Avançando no passo, pode-se perceber que o vetor de probabilidades também tende a um processo estável, independente da distribuição de probabilidade inicial, conforme no gráfico a seguir, que mostra os valores das probabilidades de cada vetor em seu respectivo passo.



Alterando-se a matriz de transição para a seguinte:

```
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,] 0.25 0.75 0.00 0.00    0
[2,] 0.50 0.50 0.00 0.00    0
[3,] 0.00 0.00 1.00 0.00    0
[4,] 0.00 0.00 0.33 0.66    0
[5,] 1.00 0.00 0.00 0.00    0
```

```
> B
```

```
      0    1    2    3 4
0 0.25 0.75 0.00 0.00 0
1 0.50 0.50 0.00 0.00 0
2 0.00 0.00 1.00 0.00 0
3 0.00 0.00 0.33 0.66 0
4 1.00 0.00 0.00 0.00 0
```

Observa-se os seguintes estados:

TRANSIENTE: quando o processo está no estado 3 há uma probabilidade positiva que ele nunca irá retornar para este estado. O estado 4 também é um estado transiente porque se o processo começa nesse estado, imediatamente o processo o deixa e nunca mais irá retornar para este estado.

RECORRENTE: Os estados 0 e 1 são recorrentes, através da matriz de transição percebe que se o processo começar a partir de um desses dois estados, este nunca deixará estes dois estados. Além disso, sempre quando o processo move-se a partir de um destes estados para o outro, este irá retornar para o estado original eventualmente.

ABSORVENTE: O estado 2 é um estado absorvente, pois, uma vez o que o processo entra no estado 2, este nunca mais o deixará.

CONJUNTO FECHADO: Os estados 0, 1 e 2 formam um conjunto fechado, ou seja, se o processo entrar em um destes estados irá permanecer neste indefinidamente.

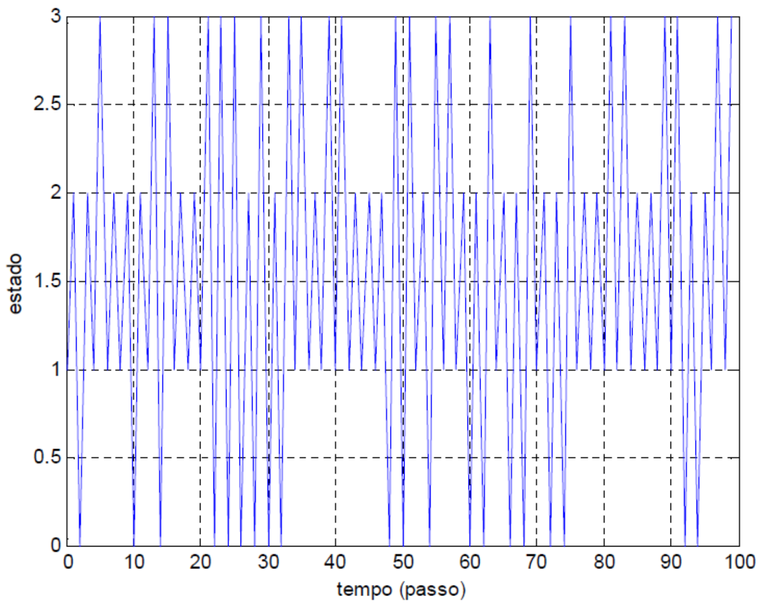
Com a matriz abaixo pode-se observar o estado periódico:

```
> C

    0   1   2   3
0 0.0 0.0 0.5 0.5
1 0.0 0.0 0.5 0.5
2 0.5 0.5 0.0 0.0
3 0.5 0.5 0.0 0.0
```

O gráfico das probabilidades da matriz C ao longo de 100 passos pode ser observado a seguir:

Figura 1: Representação da matriz C: estados periódicos



3 Melhoramento Genetico

Uma botanicista está estudando uma certa variedade de planta que é monóica (tem organismos masculinos e femininos em flores separadas numa única planta). Ela começou com duas plantas I e II e cruzou os polímeros, cruzando macho I com fêmea II e fêmea I com macho II para produzir duas proles para a próxima geração. As plantas originais são dustruídas e o processo é repetido várias vezes com as novas gerações de duas plantas adultas. Várias replicações do estudo ocorrem simultaneamente. A botanicista está interessada na proporção de plantas em alguma geração que tenha cada uma dos vários genótipos de um particular gene. Suponha que um gene possua 2 alelos, A e a. O genótipo de um indivíduo será uma das três combinações AA, Aa, aa. Quando um novo individuo nasce, ele recebe um dos alelos (cada um com probabilidade 1/2) de um de seus projenitores, e isto ocorre de maneira independente. Por exemplo, se os projenitores tem genótipos AA e Aa, então uma prole terá A do primeiro projenitor e terá A ou a de segundo projenitor com probabilidade 1/2 cada. Seja os estados desta população como os conjuntos de genótipos de 2 membros da corrente população. Não distinguiremos o conjunto $\{AA, Aa\}$ de $\{Aa, AA\}$. Existem seis estados: $\{AA, AA\}$, $\{AA, Aa\}$, $\{AA, aa\}$, $\{Aa, Aa\}$, $\{Aa, aa\}$, e $\{aa, aa\}$. Para cada estado, será calculado a probabilidade que a próxima geração estará em cada um dos seis estados.

Se o estado for $\{AA, AA\}$, tem-se:

```
> P1

  A   A
A 1/4 1/4
A 1/4 1/4
```

$$\{AA\} = 1$$

```
> P1

   AA   AA   AA   AA
AA 1/16 1/16 1/16 1/16
AA 1/16 1/16 1/16 1/16
AA 1/16 1/16 1/16 1/16
AA 1/16 1/16 1/16 1/16
```

logo a próxima geração terá o mesmo estado com probabilidade 1.

$$\{AA, AA\} = 1$$

Se o estado corrente é $\{Aa, aa\}$,

```
> P2

  A   a
a 1/4 1/4
a 1/4 1/4
```

$$\{Aa\}, \{aa\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

```
> P2

   Aa   aa   aA   aa
Aa 1/16 1/16 1/16 1/16
aa 1/16 1/16 1/16 1/16
aA 1/16 1/16 1/16 1/16
aa 1/16 1/16 1/16 1/16
```

então todas os três estados correntes para próxima geração são:

$$\{Aa, Aa\},\ \{Aa, aa\},\ \{aa, aa\} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$$

Se o estado é $\{AA, aa\}$, a próxima geração estará no estado $\{Aa, Aa\}$ com probabilidade 1, veja:

```
> P3

  A   A
a 1/4 1/4
a 1/4 1/4
```

$$\{aA, aA\} = 1$$

```
> P3

   aA   aA   aA   aA
aA 1/16 1/16 1/16 1/16
aA 1/16 1/16 1/16 1/16
aA 1/16 1/16 1/16 1/16
aA 1/16 1/16 1/16 1/16
```

$$\{aA, aA\} = 1$$

Se o estado corrente é $\{Aa, Aa\}$,

```
> P4

  A   a
A 1/4 1/4
a 1/4 1/4
```

$$\{AA\}, \{Aa\}, \{aa\} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}.$$

```
> P4

   AA   Aa   aA   aa
AA 1/16 1/16 1/16 1/16
Aa 1/16 1/16 1/16 1/16
aA 1/16 1/16 1/16 1/16
aa 1/16 1/16 1/16 1/16
```

então todas os seis estados possíveis para a próxima geração são:

$$\{AA, AA\},\ \{AA, Aa\},\ \{AA, aa\},\ \{Aa, Aa\},\ \{Aa, aa\},\ \{aa, aa\} = \left\{\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right\}$$

Se o estado corrente é $\{AA, Aa\}$,

```
> P5

  A   A
A 1/4 1/4
a 1/4 1/4
```

$$\{AA\}, \{Aa\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

```
> P5
```

```
   Aa   aa   aA   aa
Aa 1/16 1/16 1/16 1/16
aa 1/16 1/16 1/16 1/16
aA 1/16 1/16 1/16 1/16
aa 1/16 1/16 1/16 1/16
```

então todas os três estados correntes para próxima geração são:

$$\{AA, AA\},\ \{AA, Aa\},\ \{Aa, Aa\} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$$

Se o estado for $\{AA, AA\}$, tem-se:

```
> P6
```

```
  a   a
a 1/4 1/4
a 1/4 1/4
```

$$\{aa\} = 1$$

```
> P6
```

```
   aa   aa   aa   aa
aa 1/16 1/16 1/16 1/16
aa 1/16 1/16 1/16 1/16
aa 1/16 1/16 1/16 1/16
aa 1/16 1/16 1/16 1/16
```

logo a próxima geração terá o mesmo estado com probabilidade 1.

$$\{aa, aa\} = 1$$

Assim, a matriz de transição P será dada por:

```
> P
```

```
       AA,AA AA,Aa AA,aa Aa,Aa Aa,aa  aa,aa
AA,AA 1.0000  0.00 0.000  0.00  0.00 0.0000
AA,Aa 0.2500  0.50 0.000  0.25  0.00 0.0000
AA,aa 0.0000  0.00 0.000  1.00  0.00 0.0000
Aa,Aa 0.0625  0.25 0.125  0.25  0.25 0.0625
Aa,aa 0.0000  0.00 0.000  0.25  0.50 0.2500
aa,aa 0.0000  0.00 0.000  0.00  0.00 1.0000
```

Se multiplicarmos P várias vezes:

```
> P.2
```

```
       AA,AA  AA,Aa  AA,aa  Aa,Aa  Aa,aa  aa,aa
AA,AA 1.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
AA,Aa 0.3906 0.3125 0.0312 0.1875 0.0625 0.0156
AA,aa 0.0625 0.2500 0.1250 0.2500 0.2500 0.0625
Aa,Aa 0.1406 0.1875 0.0312 0.3125 0.1875 0.1406
Aa,aa 0.0156 0.0625 0.0312 0.1875 0.3125 0.3906
aa,aa 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 1.0000
```

```
> P.3

       AA,AA  AA,Aa  AA,aa  Aa,Aa  Aa,aa  aa,aa
AA,AA 1.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
AA,Aa 0.4805 0.2031 0.0234 0.1719 0.0781 0.0430
AA,aa 0.1406 0.1875 0.0312 0.3125 0.1875 0.1406
Aa,Aa 0.2070 0.1719 0.0391 0.2031 0.1719 0.2070
Aa,aa 0.0430 0.0781 0.0234 0.1719 0.2031 0.4805
aa,aa 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 1.0000

> P.4

       AA,AA  AA,Aa  AA,aa  Aa,Aa  Aa,aa  aa,aa
AA,AA 1.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
AA,Aa 0.5420 0.1445 0.0215 0.1367 0.0820 0.0732
AA,aa 0.2070 0.1719 0.0391 0.2031 0.1719 0.2070
Aa,Aa 0.2627 0.1367 0.0254 0.1758 0.1367 0.2627
Aa,aa 0.0732 0.0820 0.0215 0.1367 0.1445 0.5420
aa,aa 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 1.0000

> P.5

       AA,AA  AA,Aa  AA,aa  Aa,Aa  Aa,aa  aa,aa
AA,AA 1.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
AA,Aa 0.5867 0.1064 0.0171 0.1123 0.0752 0.1023
AA,aa 0.2627 0.1367 0.0254 0.1758 0.1367 0.2627
Aa,Aa 0.3079 0.1123 0.0220 0.1377 0.1123 0.3079
Aa,aa 0.1023 0.0752 0.0171 0.1123 0.1064 0.5867
aa,aa 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 1.0000
```

$$\vdots$$

```
> P.50

      AA,AA AA,Aa AA,aa Aa,Aa Aa,aa aa,aa
AA,AA  1.00     0     0     0     0  0.00
AA,Aa  0.75     0     0     0     0  0.25
AA,aa  0.50     0     0     0     0  0.50
Aa,Aa  0.50     0     0     0     0  0.50
Aa,aa  0.25     0     0     0     0  0.75
aa,aa  0.00     0     0     0     0  1.00
```

As probabilidades encontradas em $\{Aa, Aa\}$ formarão o vetor inicial v_0, que dará início ao processo:

```
> v0 <- c(1/16,1/4,1/8,1/4,1/4,1/16)
```

Logo o vetor $v = v_0 P$ será:

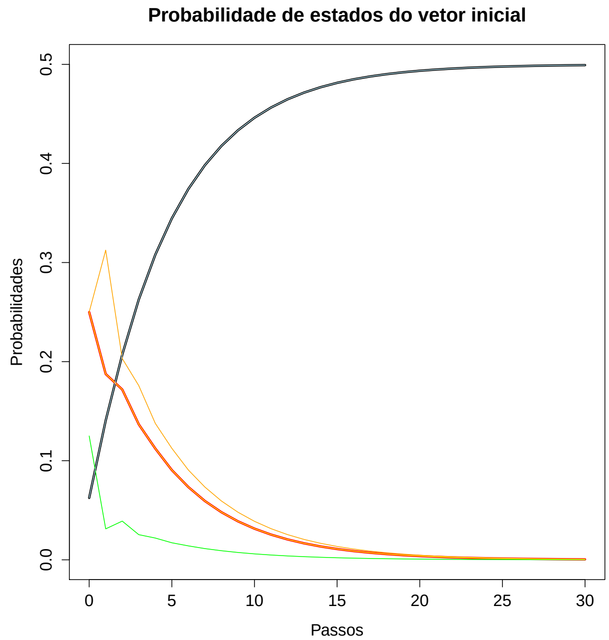
```
> (v1 <- v0 %*% P)

        AA,AA  AA,Aa   AA,aa  Aa,Aa  Aa,aa    aa,aa
[1,] 0.140625 0.1875 0.03125 0.3125 0.1875 0.140625
```

onde esta derivação mostra que as probabilidades para o estado da cadeia na observação do tempo 2 são especificadas pelas probabilidades do vetor $v_1 P$. Se $v_0 P^{50}$, logo,

```
> (v50 <- round((v0 %*% P.50),4))
```

```
     AA,AA AA,Aa AA,aa Aa,Aa Aa,aa aa,aa
[1,]   0.5     0     0     0     0   0.5
```



Neste gráfico, observa-se que as curvas em cor preta e azul coincidem e que as curvas em cor vermelha e amarelo também coincidem.

A matriz de probabilidades inicial possui as seguintes propriedades: transiente, recorrente e absorvente. Já na matriz após 50 passos de tempo, observamos probabilidades positivas apenas para os estados futuros $\{AA, AA\}$ e $\{aa, aa\}$. Podemos observar que no estágio 50, os estados $\{AA, AA\}$ e $\{aa, aa\}$ não se comunicam diretamente entre si mas ambos se comunicam com os estágios intermediários do passo anterior. Assim, com os vários cruzamentos sucessivos, com o tempo, o processo se estabilizará e apenas os estágios $\{AA, AA\}$ e $\{aa, aa\}$ serão possíveis para o passo futuro.