CE-227: Inferência Bayesiana – 3^a Avaliação Semanal (21/03/2014)

GRR: ______________ **Nome:** ______________________________________ **Turma:** ________

1. Embora prioris conjugadas tornem a computação bayesiana extremamente simples, elas podem não ser apropriadas e por vezes simplesmente não existem (de forma útil) para o modelo que se deseje ajustar. Explique com detalhes como as análises devem ser conduzidas neste caso, considerando pelo menos duas abordagens (de natureza distinta).

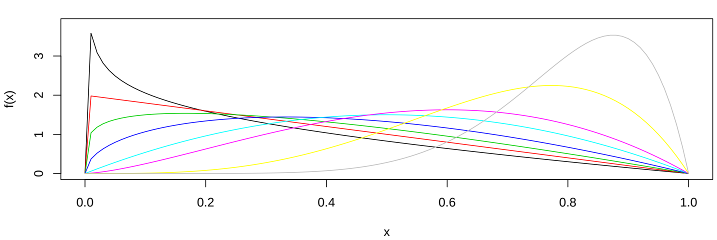
2. Mostre como as abordagens mencionadas no item anterior seriam aplicadas no exemplo a seguir. Inclua ainda nos comentários como resumos da posteriori tais como média, variância, quantis e intervalos seriam obtidos e cada abordagem.

   Exemplo (aproveitamento de saques em jogos de tênis) [1] *Considere dados (iid)* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *das taxas de sucesso no primeiro saque de um jogador de tênis em* n *jogos de um campeonato. Assuma o modelo* $X|\theta \sim f(x_i|\theta) = \theta(\theta+1)x_i^{\theta-1}(1-x_i)$ *com* $x_i \in (0,1)$ *e* $\theta > 0$*. Não existe uma família conjugada usual para este modelo e considera-se uma priori gama* $\theta \sim \mathrm{G}(a, b)$*.*

3. Considere agora que $n = 20$, $\sum_i \log(x_i) = -4,59$ e suponha que a priori é definida com $a = b = 1$. Mostre como estes dados seria utilizados na obtenção das expressões relevantes das abordagens mencionadas.

   Solução:

```
> dfx <- function(x, theta)
+     ifelse((x>0 & x<1), theta*(theta+1) * x^(theta-1) * (1-x), 0)
> integrate(dfx, lower=0, upper=1, theta=0.8)

1 with absolute error < 2.5e-07

> integrate(dfx, lower=0, upper=1, theta=1)

1 with absolute error < 1.1e-14

> integrate(dfx, lower=0, upper=1, theta=1.5)

1 with absolute error < 1e-04

> integrate(dfx, lower=0, upper=1, theta=2)

1 with absolute error < 1.1e-14

> integrate(dfx, lower=0, upper=1, theta=4.4)

1 with absolute error < 5e-09
```



Verossimilhança:

$$\prod_i (x_i)^{\theta-1} = \prod_i (x_i)^{\theta} \cdot \prod_i (x_i)^{-1}$$

e

$$\prod_i (x_i)^{\theta} = \exp\{\theta \sum_i \log(x_i)\}$$

[1] Retirado de *http://www.stat.duke.edu/ st118/sta250/laplace.pdf*

A verossimilhança pode ser escrita de forma a isolar termos (constantes) que não dependem de θ:

$$L(\theta|y) = \theta^n(\theta+1)^n \exp\{\theta \sum_i \log(x_i)\} \prod_i \frac{1-x_i}{x_i} \propto \theta^n(\theta+1)^n \exp\{\theta \sum_i \log(x_i)\}$$

e a log-verossimilhança

$$l(\theta|y) = n\log(\theta) + n\log(\theta+1) + \theta\sum_i \log(x_i) - \sum_i \log\left(\frac{x_i}{1-x_i}\right) \propto n\log(\theta) + n\log(\theta+1) + \theta\sum_i \log(x_i)$$

```
> L <- function(par, dados, log = TRUE, cte = FALSE){
+     ll <- dados$n * (log(par) + log(par+1)) + par * dados$slx
+     if(cte) ll <- ll - sum(log(dados/(1-dados)))
+     if(log) return(ll)
+     else return(exp(ll))
+ }
> DAT <- list(n=20, slx = -4.59)
> curve(L(x, dados=DAT), from=1, to=26)
> optimize(L, interval=c(0.1,20), dados=DAT, maximum=TRUE)

$maximum
[1] 8.243

$objective
[1] 48.83

> ##
> U <- function(par, dados)
+     (dados$n/par) + (dados$n/(par+1)) + dados$slx
> uniroot(U, lower=0.1, upper=20, dados=DAT)

$root
[1] 8.243

$f.root
[1] -1.316e-06

$iter
[1] 8

$init.it
[1] NA

$estim.prec
[1] 6.104e-05

> H <- function(par, dados)
+     -n * (par^(-2) + (par+1)^(-2))

> n <- 20
> SlogX <- -4.59
```

Aproximação da verossilhança, MLE e curvatura (analiticamente)

```
> polyroot(c(n, (2*n+SlogX),SlogX))

[1] -0.5286-0i  8.2432+0i

> (MLE <- -((SlogX+2*n)+sqrt(((SlogX+2*n)^2) - 4*SlogX*n))/(2*SlogX))

[1] 8.243

> (H <- -n*((1/MLE^2) + (1/(1+MLE)^2)))

[1] -0.5284
```

Aproximação da posteriori, moda e curvatura (numericamente)

```
> alpha <- beta <- 1
> a <- n+alpha-1
> b <- beta - SlogX
> (mo.post <- (-(b-n-a) + sqrt(((b-n-a)^2) + 4*a*b))/(2*b))

[1] 6.69

> #
> (H <- -(((n+alpha-1)/(mo.post^2)) + (n/(mo.post+1)^2)))

[1] -0.785

> -1/H

[1] 1.274

> sqrt(-1/H)

[1] 1.129
```

$$X|\theta \sim \exp\{\theta\} \Rightarrow f(x|\theta) = \theta \exp\{-\theta x\}$$

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \theta^n \exp\{-\theta \Sigma x_i\} = \theta^n \exp\{-\theta n\bar{x}\}$$

Priori:

$$\theta \sim Ga(\alpha, \beta) \Rightarrow f(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}\exp\{-\beta\theta\}$$

Sabendo que:

$$\begin{cases} E(\theta) & = \dfrac{\alpha}{\beta} = 0,2 \\ V(\theta) & = \dfrac{\alpha}{\beta^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha & = 0,2\beta \\ \beta & = \dfrac{0,2\beta}{\beta^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta & = 0,2 \\ \alpha & = 0,04 \end{cases}$$

Assim, $\theta \sim Ga(0,04; 0,2)$.

Posteriori:

$$\begin{aligned} f(\theta|x) &\propto f(\theta)f(x|theta) \\ &\propto \theta^{(0,04-1)}\exp\{-0,2\theta\}\theta^n \exp\{-\theta n\bar{x}\} \\ &\propto \theta^{(n+0,04-1)}\exp\{-\theta(n\bar{x}+0,2)\} \end{aligned}$$

Logo, $[\theta|x] \sim Ga(n+0,04, n\bar{x}+0,2)$, como $n = 20$ e $\bar{x} = 3,8$, $[\theta|x] \sim Ga(20,04; 76,2)$.