Noções de Probabilidade e Estatística
Resolução dos Exercícios Ímpares
CAPÍTULO 2

Felipe E. Barletta Mendes

8 de outubro de 2007

Exercícios da seção 2.1

1 Para cada um dos casos abaixo, escreva o espaço amostral correspondente e conte seus elementos.

(a) Uma moeda é lançada duas vezes e observam-se as faces obtidas.
$\Omega = (CC, CK, KC, KK)$, c sendo cara e k sendo coroa.

(b) Um dados é lançado duas vezes e a ocorrência de face par ou ímpar é obervada.
$\Omega = (PP, PI, IP, II)$

(c) Uma urna contém 10 bolas azuis e 10 vermelhas cm dimensões rigorosamente iguais. Três bolas são selecionadas ao acaso, com reposição e as cores são anotadas.
$\Omega = (VVV, AAA, AAV, AVA, VAA, AVV, VAV, VVA)$

(d) Dois dados são lançados simultaneamente e estamos interessados na soma das faces observadas.
$\Omega = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$

(e) Em uma cidade, famílias com três crinças são selecionadas ao acaso, anotando-se o sexo de cada uma.
$\Omega = (MMM, MMF, MFM, FMM, MFF, FMF, FFM, FFF)$

(f) Uma máquina produz 20 peças por hora, escolhe-se um instante qualquer e observa-se o número de defeituosas n apróxima hora.
$\Omega = (0, 1, 2, 3, 4, ..., 20)$

(g) Uma moeda é lançada consecutivamente até o aparecimento da primeira cara.
$\Omega = (C, KC, KKC, KKKC, ...)$

3 Uma Universidade tem 10 mil alunos dos quais 4 mil são considerados esportistas. Temos, ainda, que 500 alunos são do curso de biologia diurno, 700 da biologia noturno, 100 são esportistas e da biologia diurna e 200 são esportistas e da biologia noturno. Um aluno é escolhido, ao acaso, e pergunta-se a probabilidade de:

	Bilogia Noturno	Biologia Diurno	Outros	Total
Esportista	200	100	3700	4000
Não Esportista	500	400	5100	6000
Total	700	500	8800	10000

(a) Ser esportista
$P(E) = 0.4$

(b) Ser esportista e aluno da biologia noturno
$P(E \cap N) = P(E) * P(N) = 0.02$

(c) Não ser da biologia
$1 - P(N \cap D) = P(O) = 0.88$

(d) Ser esportista ou aluno da biologia
$P(E \cup B) = P(E) + P(B) - P(E \cap B) = 0.4 + 0.12 - 0.03 = 0.49$

(e) Não ser esportista nem aluno da bilogia
$P(1 - P(E) \cap O) = P(1 - P(E)) * P(O) = (1 - 0.4) * 0.88 = 0.52$

5 Dois processadores tipos A e B são colocados em teste por 50 mil horas. A probabilidade de que um erro de cálculo aconteça em um processador do tipo A é de 1 sobre 30, no tipo B, 1 sobre 80 e, em ambos, 1 sobre 1000. Qual a probabilidade de que:

(a) Pelo menos um dos processadores tenha apresentado erro?
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.0333333333333333 + 0.0125 - 0.001 = 0.04483$

(b) Nenhum processador tenha apresentado erro?
Pela lei de Morgan da Teoria dos conjuntos: $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 0.95517$

(c) Apenas o processador A tenha apresentado erro?
$P(A \cap \overline{B}) = P(A) * P(\overline{B}) = 0.0333333333333333 * 0.9875 = 0.0329166666666667$

Exercícios da seção 2.2

1 Considere dois eventos A e B, mutuamente exclusivos, com P(A)=0,3 e P(B)=0,5. Calcule:

(a) $P(A \cap B) = 0$

(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,5 - 0 = 0,8$

(c) $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B) = 0$

(d) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,3 = 0,7$

(e) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,8 = 0,2$

3 Uma escola do ensino médio do interior de São Paulo tem 40% de estudantes do sexo masculino. Entre estes, 20% nunca viram o mar, ao passo que, entre as meninas, essa porcentagem é de 50% .Qual a probabilidade de que um aluno selecionado ao acaso seja:

(a) Do sexo masculino e nunca tenha visto o mar?
$P(M \cap \overline{VM}) = P(\overline{VM/M})P(M) = 0,2 * 0,4 = 0,08$

(b) Do sexo feminino ou nunca ter visto o mar?
$P(F \cup \overline{VM}) = 1 - P(M \cap VM) = 1 - (0,4 * 0,8) = 0,68$

Exercícios da seção 2.3

1 Uma moeda é viciada de modo que a probabilidade de sair cara é 4 vezes maior que a de sair coroa. Para 2 lançamentos independentes determinar:

- Aqui os eventos são mutuamente exclusivos, portanto a intersecção é nula.

(a) O espaço amostral.
$\Omega = (CC, CK, KC, KK)$, c sendo cara e k sendo coroa.

(b) A probabilidade de sair somente uma cara.
$P(C, K \cup K, C) = P(C, K) + P(K, C) = 0,16 + 0,16 = 0,32$

(c) A probabilidade de sair pelo menos uma cara.
$P(C, C \cup K, C \cup C, K) = P(C, C) + P(K, C) + P(C, K) = 0,64 + 0,16 + 0,16 = 0,96$

(d) A probabilidade de dois resultados iguais.
$P(CC \cup KK) = P(CC) + P(KK) = 0,64 + 0,04 = 0,68$

5 Peças produzidas por uma máquina são classificadas como defeituosas(D), recuperáveis(R) ou perfeitas(P) com probabilidade de 0,1; 0,2 e 0,7; respectivamente. De um grande lote, foram sorteadas duas peças com reposição. Calcule:

(a) P(Duas serem defeituosas).
$P(D \cap D) = P(D) * P(D) = 0,1 * 0,1 = 0,01$

(b) P(Pelo menos uma ser perfeita).
$P(PP \cup PD \cup DP \cup PR \cup RP) = P(PP) + P(PD) + P(DP) + P(PR) + P(RP) = 0,49 + 0,07 + 0,07 + 0,14 + 0,14 = 0,91$

(c) P(Uma ser recuperável e uma ser perfeita).
$P(R \cap P) \cup P(P \cap R) = P(R) * P(P) + P(P) * P(R) = 0,14 + 0,14 = 0,28$

7 Numa cidade do interior de São Paulo, estima-se que cerca de 20% dos habitantes têm algum tipo de alergia(A). Sabe-se que 50% dos alérgicos praticam esporte(E), enquanto que essa porcentagem entre os não alérgicos é de 40%. Para um indivíduo escolhido aleatoriamente nessa cidade, obtenha a probabilidade de:

(a) Não praticar esporte.
$1 - P(E) = 1 - [P(E/A)P(A) + P(E/\overline{A})P(\overline{A})] = 1 - [0,5 * 0,2 + 0,4 * 0,8] = 1 - 0,42 = 0,58$

(b) Ser alérgico dado que não pratica esportes.
$$P(A/\overline{E}) = \frac{P(A \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{P(\overline{E}/A) * P(A)}{P(\overline{E})} = \frac{0,5 * 0,2}{0,58} = 0,1724138$$

9 Dois dados equilibrados são lançados. Calcule a probabilidade de:

(a) Obter o par (3,4), sabendo-se que ocorreu face ímpar no primeiro dado.
Primeiro calculamos a probabilidade de sair ímpar no primeiro dado
$P(Impar) = P(Impar \cap Impar) + P(Impar \cap Par) = 9/36 + 9/36 = 18/72 = 1/4 = 0,25$
Agora Claculamos a probabilidade condicional
$$P[(3,4)/Impar] = \frac{P[(3,4) \cap Impar]}{P[Impar]} = \frac{0,02777 * 0,5}{0,25} = 0,05555556$$

(b) Ocorrer face ímpar no segundo dado, sabendo-se que ocorreu face par no primeiro daddo.
O cálculo da probabilidade de sair par no primeiro dado que é análogo ao cálculo de sair ímpar no primeiro dado.
$P(Impar/Par) = \dfrac{P(Impar \cap Par)}{P(Par)} = \dfrac{0,5 * 0,25}{0,25} = 0,5$
Lembrando que 0,25 é a probabilidade de sair par (ou ímpar) no primeiro lançamento dado que o segundo pode ser par o ímpar.

11 Dois Armários guardam as bolas de voleibol(V) e basquete(B). O armário 1(A1) tem 3 bolas de voleibol e 1 de basquete, enquanto o armário 2(A2) tem 3 bolas de voleibol e 2 de basquete. Escolhendo-se ao acaso, um armério e, em seguida, uma de suas bolas, calcule a probabilidade dela ser:

	Arm.1	Arm.2	
Volei	3	3	6
Basquete	1	2	3
	4	5	9

(a) De voleibol, sabendo-se que o armário 1 foi escolhido.

$$P(Volei|A1) = \frac{P(Volei \cap A1)}{P(A1)} = \frac{0,333}{0,444} = 0,75$$

(b) De basquete, sabendo-se que o armário 2 foi escolhido.

$$P(Basquete|A2) = \frac{P(Basquete \cap A2)}{P(A2)} = \frac{0,222}{0,555} = 0,4$$

(c) De basquete.

Como a probabilidade de escolher um armário ou outro é 1/2 devemos calcular a chance de escolhermos bola de basquete para cada armário.

$$P(Basquete) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{40} = 0,325$$

13 Você entrega a seu amigo uma carta, destinada à sua namorada, para ser colocada no correio. Entretanto, ele pode se esquecer com probabilidade 0,1. Se não esquecer, a probabilidade de que o correio extravie a carta é de 0,1. Finalmente, se foi enviada pelo correio a probabilidade de que a namorada não a receba é de 0,1.

(a) Sua namorada não recebeu a carta, qual a probabilidade de seu amigo ter esquecido de colocá-la no correio?

15 Determine a probabilidade de escolhermos:

(a) Uma pessoa do sexo masculino e sem opinião sobre a reforma agrária?

Primeiro contamos na tabela o total de homens que não têm opinião sobre reform agrária, que neste caso são 9. Depois dividimos pelo total de alunos.
$\frac{9}{74} = 0,1216$

(b) Uma mulher contrária a reforma agrária?

Primeiro contamos na tabela o total de mulheres que são contrárias a reforma agrária, que são 6. Depois dividimos pelo total de alunos.
$\frac{6}{74} = 0,081$

(c) Dentre os estudantes do noturno, um que seja a favor da reforma agrária?

Primeiro contamos na tabela o total de alunos que são a favor da reforma agrária, que são 18. Depois dividimos pelo total de alunos do período noturno.
$\frac{18}{37} = 0,4864$

(d) Uma pessoa sem opinião, sabendo-se que ela é do sexo feminino?

Primeiro contamos na tabela o total de alunos do sexo feminino que não têm opinião, que são 4. Depois dividimos pelo total de alunas.
$\frac{4}{26} = 0,1538$

17 Uma companhia que fura poços artesianos trabalha numa região escolhendo, aleatoriamente, o ponto de furo. Não encontrando água nessa tentativa, sorteia outro local e, caso também não tenha sucesso, faz uma terceira tentativa. Admita probabilidade 0,7 de encontrar água em qualquer ponto dessa região. Calcule a probabilidade de:

(a) Encontrar água na segunda tentativa.

Fazemos a multiplicação de não encontrar água na primeira tentativa(0,3) e de encontrar na segunda tentativa(0,7).
$0,3 * 0,7 = 0,21$

(b) Encontrar água em até duas tentativas.

Aqui somamos as probabilidades de se encontrar água nas duas tentativas, de encontrar água na primeira e não na segunda e de não encontrar na primeira e encontrar na segunda tentativa.
$(0,7 * 0,7) + (0,7 * 0,3) + (0,3 * 0,7) = 0,91$

(c) Encontrar água.

Segundo o enunciado faz-se três tentativas. Portanto o raciocício é análogo ao ítem anterior(b).
$(0,7*0,7*0,7) + 3*(0,3*0,3*0,7) + 3*(0,7*0,7*0,3) = 0.973$

19 A tabela a seguir apresenta dados dos 1000 ingressantes de uma universidade, com informações sobre área de estudo e classe sócio-econômica.

Área-Classe	Alta	Média	Baixa	Total
Exatas	120	156	68	344
Humanas	72	85	112	269
Biológicas	169	145	73	387
Total	361	386	253	1000

Se um aluno é escolhido ao acaso, determine a probabilidade de:

(a) Ser da classe econômiva mais alta.

Aqui pegamos o total de ingressantes da classe econômica mais alta e dividimos pelo total geral.
$\frac{361}{1000} = 0,361$

(b) Estudar na àrea de Exatas.
Pega-se o total de ingressos na área de extas e divide-se pelo total geral.
$\frac{344}{1000} = 0,344$

(c) Estudar na área de humanas, sendo de classe média.
Neste caso dividimos o total de alunos da área de humanas que são da classe média pelo total de ingressos da classe média.
$\frac{85}{386} = 0,22$

(d) Ser da classe baixa, dado que estuda na área de biológicas.
Divide-se o número de alunos que são da área de biológicas e da classe baixa e divide-se pelo total de ingressos da área de biológicas.
$\frac{73}{387} = 0,188$

21 Três fábricas fornecem equipamentos de precisão para o laboratório de química de uma universidade. Apesar de serem aparelhos de precisão, existe uma pequena chance de subestimação ou superestimação das medidas efetuadas. A tabela a seguir apresenta o comportamento do equipamento produzido em cada fábrica:

Frábrica I	Subestima	Exata	Superestima
Probabilidade	0.01	0.98	0.01

Frábrica II	Subestima	Exata	Superestima
Probabilidade	0.005	0.98	0.015

Frábrica III	Subestima	Exata	Superestima
Probabilidade	0	0.99	0.01

As fábricas I, II, e III fornecem respectivamente, 20%, 30% e 50% dos aparelhos utilizados. Escolhemos, ao acaso, um desses aparelhos e perguntamos a probabilidade de:

(a) Haver superestimação de medidas?
$P(Supertimao) = (0.2 * 0.01) + (0.3 * 0.015) + (0.5 * 0.01) = 0.0115$

(b) Não haver subestimação das medidas efetuadas?
$P(no.sub) = 1 - P(Subestimao) = 1 - [(0.2 * 0.01) + (0.3 * 0.005)] = 0.9965$

(c) Dando medidas exatas, ter sido fabricado em III?
Primeiro calculamos a probabilidade da medida ser exata.
$P(Exata) = (0.2 * 0.98) + (0.3 * 0.98) + (0.5 * 0.99) = 0.985$

Agora sim calculamos a probabilidade condicional do equipamento ser da Fábrica III, dado que a medida foi exata.

$$P(Fab.III/Exata) = \frac{P(Exata/Fab.III) * P(Fab.III)}{P(Exata)} = \frac{0.99 * 0.5}{0.985} = 0.50253807106599$$

(d) Ter sido produzido por I, dado que não subestima as medidas?

Como já calculamos a probabilidade de não haver medidas subestimadas no ítem b, Nos resta calcular a probabilidade condicional.

$$P(Fab.I/no.sub) = \frac{P(no.sub/Fab.I) * P(Fab.I)}{P(no.sub)} = \frac{0.99 * 0.2}{0.9965} = 0.198695434019067$$

23 Estatísticas dos últimos anos do departamento estadual de estradas são apresentadas na tabela a seguir, contendo o número de acidentes incluindo vítimas fatais e as condições do principal motorista envolvido, sóbrio ou alcoolizado.

Motorista Vítimas Fatais	Não	Sim	Total
Sóbrio	1228	275	1503
Alcoolizado	2393	762	3155
Total	3621	1037	4658

Você diria que o fato do motorista estar ou não alcoolizado interfere na ocorrência de vítimas fatais?

Calculando as probabilidades condicionais de se ter vítimas fatais quando se está alcoolizado ($762/3155 = 0,24$), e quando não se está alcoolizados($275/1503 =$

$0,18$), são diferentes, portanto o fato do motorista estar alcoolizado interfere.

25 Suponha que X represente o número de horas de atividade física por semana. Considere a tabela a seguir:

Sexo/Atividade	$0 \leq X < 3$	$3 \leq X < 5$	$X \geq 5$	Total
Feminino	22	8	7	37
Masculino	3	4	6	13
Total	25	12	13	50

(a) Qual é a probabilidade de sortear aleatoriamente uma menina com atividade física semanal na faixa de $[3, 5)$ horas?

$8/50 = 0,16$

(b) Calcule $P(X \geq 5) = 13/50 = 0,26$

27 Sejam A,B e C pertencentes a um mesmo espaço amostral. Mostre que:

(a) $P(A^c/B) = 1 - P(A/B)$
Primeiro resolvemos a seguinte probabilidade: $P(A^c) = 1 - P(A)$

Se assumirmos que, $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A) * P(B)}{P(B)}$,
Depois substituímos na fórmula, $P(A^c/B) = \dfrac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1 - P(A) * P(B)}{P(B)}$

Logo,
$P(A^c/B) = 1 - P(A/B)$

(b) $P(A \cup B/C) = P(A/C) + P(B/C) - P(A \cap B/C)$
Consideremos,
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Logo,
$P(A \cup B/C) = P(A/C) + P(B/C) - P(A \cap B/C)$

(c) Se $B = A^c ento P(A \cup B/C) = 1$
Substituímos B por A^c na fórmula, $P(A \cup A^c/C)$
Sabemos que por definição,
$P(A \cup A^c) = 1$
Logo,
$P(1/C) = 1$

(d) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
Desenvolvendo teremos,

$P(A\cup B\cup C) = P[(A\cup B)\cup C] = P(A\cup B)+P(C)-P[(A\cup B)\cap C] =$
$P(A\cup B)+P(C)-P[(A\cap C)\cup P(B\cap C)] =$
$P(A)+P(B)-P(A\cap B)+P(C)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C) =$
$P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

29 Um candidato a motorista treina na auto-escola e acredita que passa no exame com probabilidade 0,7. Se não passar, fará mais treinamento, o que ele estima que lhe aumentará em 10% a probabilidade de passar, isto é, no segundo exame passará com 0,77 de probabilidade.

(a) Supondo que ele continue acreditando nesse aumento de possibilidade, em que exame ele será aprovado?
Montamos uma tabela somando sempre 10% na probabilidade de cada tentativa, constamos que será no quinto exame.

Tentivas	Probabilidade de Passar
$2^{\underline{o}} tentativa$	$0,77$
$3^{\underline{o}} tentativa$	$0,847$
$4^{\underline{o}} tentativa$	$0,9317$
$5^{\underline{o}} tentativa$	$1,00$

(b) Qual é a probabilidade de serem necessários mais de 2 exames?
Pela tabela vemos, $1-0,9317 = 0.0683$

31 Considerando o arquivo *cancer.txt*, calcule:

(a) As probabilidades de que um paciente selecionado, ao acaso, seja classificado em cada uma das quatro categorias da variável diagnóstico.

Diagnóstico	Probabilidade
1	0.154696132596685
2	0.403314917127072
3	0.262430939226519
4	0.179558011049724