Noções de probabilidade

Eduardo Vargas Ferreira

29 de março de 2018

Introdução

- **Qual a probabilidade de sair o números 5 em um lançamento de dado?**

Aplicação e *Toy Models*

- Probabilidade e Estatística são amplamente utilizadas nas engenharias, medicina, ciências sociais, economia, ciência da computação etc.

- A lista de aplicações é essencialmente infinita como: probabilidades e estratégias de jogo, previsão econômica, epidemiologia, dentre outros;

- Dadas tantas aplicações interessantes, você pode se perguntar "por que vamos passar tanto tempo pensando em *toy models* como moedas e dados?"

- **Resposta:** a fim de desenvolveremos boas percepções para a essência simples dentro de muitos problemas complexos do mundo real.

Teoria de conjuntos

- **Elemento:** escrevemos $x \in \Omega$ para significar que o elemento x está no conjunto Ω;
- **Subconjunto:** Dizemos que o conjunto A é um subconjunto de Ω se todos os seus elementos estiverem em Ω. Nós escrevemos isso como $A \subset \Omega$;
- **Complemento:** O complemento de A em Ω é o conjunto de elementos de Ω que não estão em A. Nós escrevemos isso como A^c ou $\Omega – A$;
- **União:** A união de A e B é o conjunto de todos os elementos em A ou B (ou ambos). Nós escrevemos isso como $A \cup B$;
- **Intersecção:** A interseção de A e B é o conjunto de todos os elementos em A e B. Escrevemos isto como $A \cap B$;

Teoria de conjuntos

- **Disjunto:** A e B são disjuntos se não tiverem elementos comuns. Ou seja, se $A \cap B = \emptyset$;
- **Diferença:** a diferença de A e B é o conjunto de elementos em A que não estão em B. Nós escrevemos isso como $A–B$;

Exemplo: Sejam A, B e C eventos associados a um experimento aleatório. Expresse em notação de conjuntos e faça os diagramas de Venn:

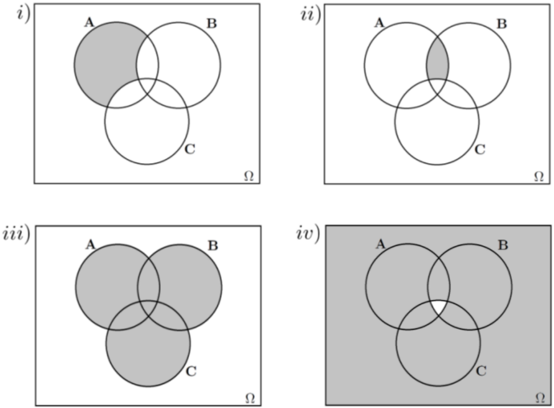
i Somente A ocorre;

ii A e B ocorrem, mas C não;

iii Pelo menos um deles ocorre;

iv Não mais que dois deles ocorrem.

Teoria de conjuntos

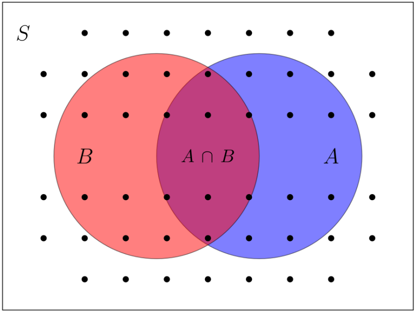


Princípio da inclusão-exclusão

- O Princípio da inclusão-exclusão diz:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

- A figura abaixo exemplifica essa questão. *S* representa todos os pontos, *A* são os pontos no interior do círculo azul, e *B* no interior do vermelho.



Exemplo

- Uma banda é composta de cantores e guitarristas:
- 7 pessoas cantam;
- 4 tocam guitarra;
- 2 fazem ambos.
- Quantas pessoas estão na banda?

Resposta: seja C o conjunto dos cantores e G o conjunto dos guitarristas. O tamanho da banda é dado por:

$$\text{Tamanho da banda} = |C \cup G| = |C| + |G| - |C \cap G| = 7 + 4 - 2 = 9.$$

Regra do produto

- A Regra do Produto diz:

  "Se houver n maneiras de executar a ação 1 e m maneiras de executar a ação 2, então existem $n \times m$ maneiras para executar a ação 1 seguida da ação 2."

- Também chamaremos isso de regra de multiplicação.

Exemplo: Se você tem 3 camisas e 4 calças, então você pode fazer $3 \times 4 = 12$ combinações de roupas.

Exemplo: Existem 5 competidores na final de 100m nas Olimpíadas. De quantas formas as medalhas de ouro, prata e bronze podem ser distribuídas? $5 \times 4 \times 3$

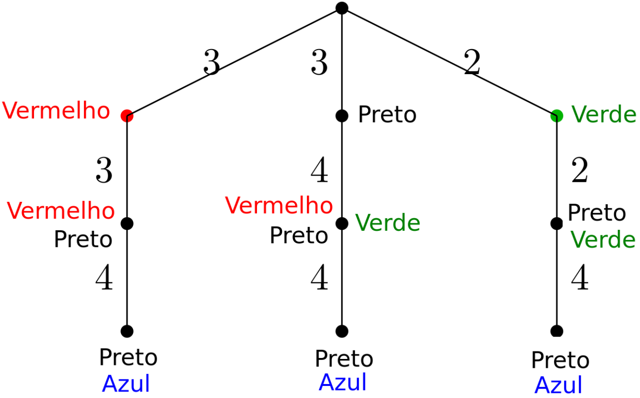
Exemplo

- Eu não usarei verde e vermelho juntos. E acho que o preto ou o azul vão bem com qualquer coisa. Abaixo está o meu guarda-roupa.
    - Camisas: 3 pretas, 3 vermelhas e 2 verdes;
    - Blusas: 1 preta, 2 vermelhas, 1 verde;
    - Calças: 2 azuis, 2 pretas.

- Quantas combinações de roupa posso utilizar?

Exemplo

$$\text{Número de possibilidades} = (3 \times 3 \times 4) + (3 \times 4 \times 4) + (2 \times 2 \times 4) = 100$$



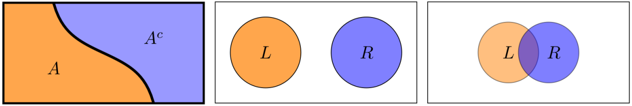
Probabilidade e operações com eventos

- **Complementar:** $P(A^c) = 1 - P(A)$;
- **Eventos disjuntos:** Se L e R são disjuntos, então

$$P(L \cup R) = P(L) + P(R);$$

- **Princípio da inclusão e exclusão:** para qualquer L e R

$$P(L \cup R) = P(L) + P(R) - P(L \cap R).$$



$\Omega = A \cup A^c$, no overlap $\quad$ $L \cup R$, no overlap $\quad$ $L \cup R$, overlap $= L \cap R$

Cáculo de Probabilidades

- A probabilidade é uma quantidade que pode ser utilizada para se medir a incerteza sobre certos eventos ou características de interesse;
- Tais eventos, em geral, estão associados a **experimentos aleatórios** (experimento para qual não se tem certeza sobre seu resultados, a priori);
- As probabilidades geralmente são baseadas em:
    - **Procedimento empírico:** calculada com base nos valores observados.
    - **Procedimento teórico:** proposto pelo pesquisador para representar a distribuição de frequência populacional.

Exemplo

- **Exemplo:** estudar as probabilidades de ocorrência das faces de um dado.
  - **Procedimento empírico:** lançar o dado um certo número de vezes e contar quantas vezes a face $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ocorreu;
    - $f_i = \frac{n_i}{n}$ é a distribuição empírica das probabilidades;
    - Para diferentes vezes que esse experimento for realizado, a distribuição de frequência terá resultados diferentes;
  - **Procedimento teórico:** construir a distribuição de frequências populacionais (probabilidades) através de suposições teóricas.

Espaço Amostral

- São todos os resultados possíveis do experimento (aleatório), denotado por $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$;

  Exemplo: lançar uma moeda duas vezes:

  $$C = cara \qquad K = coroa$$

  - $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$
    $\omega_1 = (C, C); \omega_2 = (C, K); \omega_3 = (K, C); \omega_4 = (K, K);$
  - Considerando que a moeda é honesta: $P(\omega_i) = \frac{1}{4}, \forall\, i = 1, 2, 3, 4.$
  - Seja o evento $A = \{\omega_1, \omega_4\} =$ obter duas faces iguais
    $P(A) = P(\{\omega_1, \omega_4\}) = P(\omega_1) + P(\omega_4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$

Vimos até agora

- **Experimento:** um procedimento reproduzível;
- **Espaço amostral:** conjunto de todos os resultados possíveis (Ω);
- **Evento:** um subconjunto do espaço amostral;
- **Função de probabilidade**, $P(\omega)$: fornece a probabilidade para cada resultado $\omega \in \Omega$;

    1. A probabilidade está entre 0 e 1;
    2. A probabilidade total de todos os resultados possíveis é 1.

Regras de probabilidade em notação matemática

- **Espaço amostral:** $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$;
- **Possível resultado:** $\omega \in \Omega$;
- $0 \leq P(\omega) \leq 1$;
- **Probabilidade total:** $\sum_{i=1}^{n} P(\omega_j) = 1, \ \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$;
- **Evento** A**:** $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$.

Exercício 1

- Defina o espaço amostral dos seguintes experimentos aleatórios:

  (i) Numa linha de produção, conta-se o número de peças defeituosas num intervalo de uma hora;

  (ii) Investigam-se famílias com três crianças, anotando-se a configuração segundo o sexo;

  (iii) Numa entrevista telefônica com 250 assinantes, anota-se se o proprietário tem ou não máquina de secar roupa;

  (iv) Uma lâmpada é retirada de um lote e é medido seu tempo de vida antes de queimar.

Exercício 2

- Considere o experimento: “lançar uma moeda 3 vezes”.
- E os eventos:
  - A: “Obter exatamente 2 caras”;
  - B: “Obter exatamente duas coroas”

- Os eventos A e B são disjuntos?

(1) Verdadeiro (2) Falso

Resposta: Verdadeiro: $\{KCC, CKC, CCK\} \cap \{KKC, KCK, CKK\} = \emptyset$

Exercício 3

- Considere o experimento: “lançar uma moeda 3 vezes”.
- E os eventos:
  - A: “pelo menos 2 caras”;
  - B: “exatamente duas caras”.

- O evento A implica no evento B?

(1) Verdadeiro (2) Falso

Resposta: Falso: $\{KCC, CKC, CCK, CCC\} \supset \{KCC, CKC, CCK\}$

Exercício 4

- Uma moeda e um dado são lançados.

  1. Dê o espaço amostral do experimento;
  2. Depois represente-o como produto cartesiano dos dois espaços amostrais.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 106.

Solução

- O espaço amostral Ω consiste, no caso discreto, da enumeração de todos os resultados possíveis do experimento em questão.

- O experimento jogar uma moeda tem dois resultados possíveis: cara (C) e coroa (K). Logo, o espaço amostral é $\Omega_1 = \{C, K\}$.

- O experimento jogar um dado tem seis resultados possíveis: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Logo, o espaço amostral é $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- O produto cartesiano $\Omega_1 \times \Omega_2$ é o espaço amostral do experimento *jogar uma moeda e um dado*, ou seja,

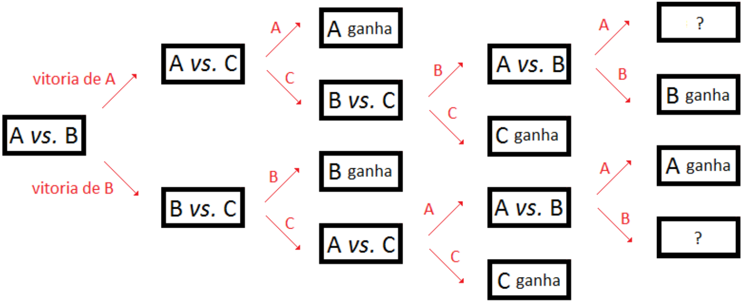
$$\begin{aligned}\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = & \{(C,1),(C,2),(C,3),(C,4),(C,5),(C,6),\\ & (K,1),(K,2),(K,3),(K,4),(K,5),(K,6)\}\end{aligned}$$

Exercício 5

- Três jogadores **A**, **B** e **C** disputam um torneio de tênis;
- Inicialmente, **A** joga com **B** e o vencedor joga com **C**, e assim por diante;
- O torneio termina quando um jogador ganha duas vezes seguidas ou quando são disputadas, ao todo, quatro partidas;
- Quais são os resultados possíveis do torneio?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 105.

Solução



$$\Omega = \{AA, BB, ACC, BCC, ACBA, ACBB, BCAA, BCAB\}$$

Exercício 5 - Continuação

(a) Mostre que a soma das probabilidades dos pontos do espaço amostral é 1.

$P(AA) + P(BB) + P(ACC) + \ldots + P(ACBB) + P(BCAA) + P(BCAB) =$
$1/4 + 1/4 + 1/8 + 1/8 + 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 = 1$

(b) Qual a probabilidade que A vença? Qual a probabilidade que B vença?

P(A vencer) = $P(AA) + P(BCAA)$ = $1/4 + 1/16$ = $5/16$ = $0{,}3125$.

P(B vencer) = $P(BB) + P(ACBB)$= $1/4 + 1/16$ = $5/16$ = $0{,}3125$.

(c) Qual a probabilidade que não haja decisão?

P(não haver decisão) = $P(ACBA) + P(BCAB)$ = $2/16$ = $0{,}125$.

Exercício 6

- Em uma classe com 50 estudantes:
  - 20 são homens (H);
  - 25 apresentam olhos castanhos (C).
- Para um aluno escolhido aleatoriamente, qual é o intervalo de valores possíveis para $p = P(H \cup C)$?

  (a) $p \leq 0,4$;

  (b) $0,4 \leq p \leq 0,5$;

  (c) $0,4 \leq p \leq 0,9$;

  (d) $0,5 \leq p \leq 0,9$;

  (e) $0,5 \leq p$.

Solução

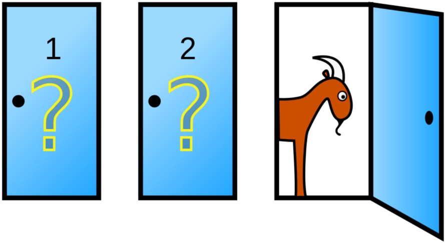
- A maneira fácil de responder a isso é que $A \cup B$ tem:
  - Um mínimo de 25 alunos (todos os homens têm olhos castanhos);
  - Um máximo de 45 alunos (nenhum homem tem olhos castanhos).
- Pensando em termos do princípio de inclusão-exclusão, temos:

$$P(H \cup C) = P(H) + P(C) - P(H \cap C) = 0,9 - P(H \cap C).$$

- Portanto, o valor máximo possível de $P(H \cup C)$ acontece se H e C forem disjuntos, então $P(H \cap C) = 0$.
- O mínimo ocorre quando $H \subset C$, então $P(H \cap C) = P(H) = 0,4$.
- Assim, a probabilidade varia entre 0,5 a 0,9.

Exercício 7

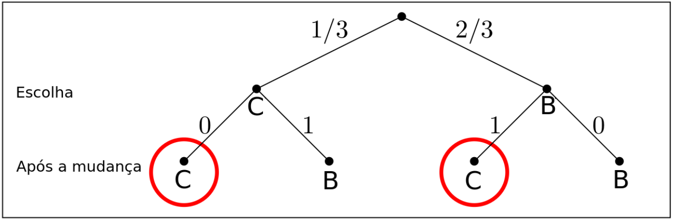
- No exercício abaixo, uma porta esconde um carro e as outras duas um bode;



- Você escolhe uma das portas. Em seguida, o apresentador abre uma das outras que contém um bode.
- Tendo a opção de alterar sua escolha, o que faria?

Solução

- É mais fácil mostrar com uma árvore que representa a estratégia de mudança:



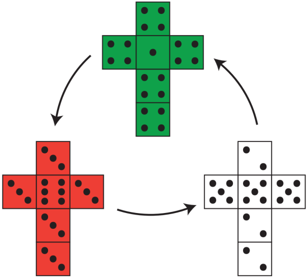
- Primeiro, o competidor escolhe uma porta, (então o apresentador mostra uma cabra), então o competidor muda as portas.

- A probabilidade de C (a porta conter um carro) é:

$$P(C|\text{após a mudança}) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}.$$

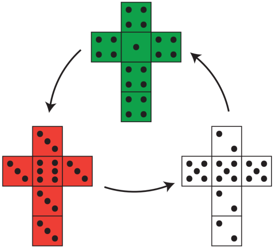
Exercício 8

- Eduardo tem três dados de seis lados, com numerações incomuns.



- O jogo consiste de dois jogadores, cada um escolhendo um dado.
- Eles jogam seus dados uma vez e o número mais alto ganha.
- Quais dos dados você escolheria?

Exercício



1. Faça a tabela com a distribuição de probabilidade para os dados;

2. Faça uma tabela de probabilidades para o espaço amostral do produto entre os dados;

3. Calcule a probabilidade de cada dado ser melhor;

Solução

	Dado vermelho		Dado branco		Dado verde	
Resultados	3	6	2	5	1	4
Probabilidade	5/6	1/6	3/6	3/6	1/6	5/6

- Abaixo, os resultados dos dados dois a dois. As cores representam quem ganharia naquele cenário;

		Branco		Verde	
		2	5	1	4
Vermelho	3	15/36	15/36	5/36	25/36
	6	3/36	3/36	1/36	5/36
Verde	1	3/36	3/36		
	4	15/36	15/36		

Solução

		Branco		Verde	
		2	5	1	4
Vermelho	3	15/36	15/36	5/36	25/36
	6	3/36	3/36	1/36	5/36
Verde	1	3/36	3/36		
	4	15/36	15/36		

- As três comparações são:
  - $P(\text{vermelho ganhar do branco})$ = 21/36 = 0,58;
  - $P(\text{branco ganhar do verde})$ = 21/36 = 0,58;
  - $P(\text{verde ganha do vermelho})$ = 25/36 = 0,69.
- Assim, o vermelho é melhor do que o branco, que é melhor do que o verde, que é melhor que o vermelho.