CE-003: Estatística II - Turma: AMB, Avaliações Semanais 1^o semestre/2012

1. Foram feitas medições dos teores de um poluente em duas regiões (A e B), representadas nos gráficos da figura a seguir.
   (a) Indique qual *boxplot* da figura à direita correspondente cada curva da figura à esquerda. Justifique sua resposta.
   (b) Em uma das regiões a média foi de 44.6 e a mediana 40.6, enquanto que em outra a média foi 49.5 e a mediana 49.2. Quais valores correspondem a cada região? Justifique sua resposta.
   (c) Interprete e discuta cada um dos gráficos, comparando as regiões.

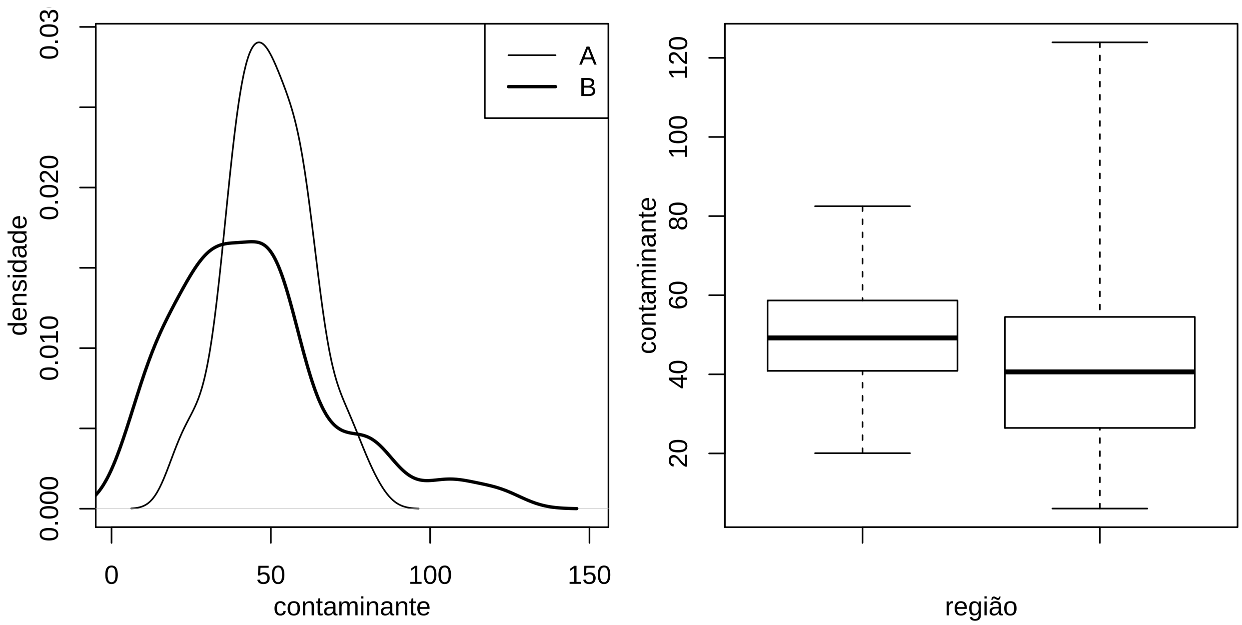


Figura 1: Teores de poluente medidos em amostras tomadas em duas regiões.

2. Foram feitas medições de índices de qualidade da água em 20 locais e os dados coletados foram:

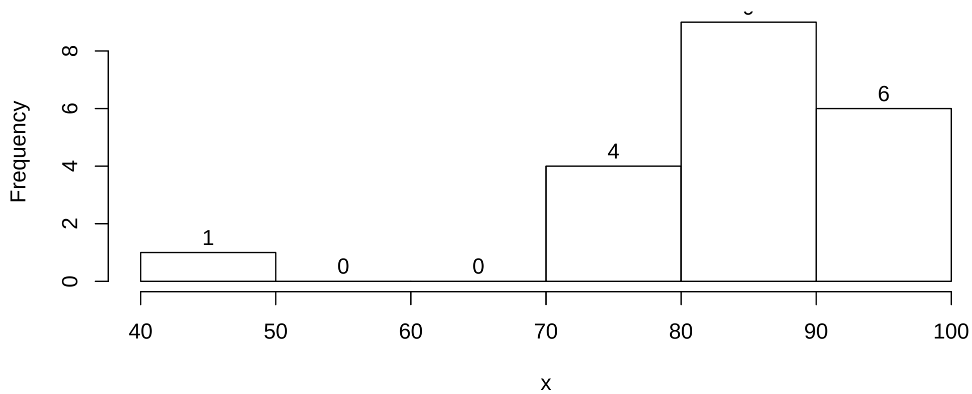
   `89.6 86.2 49.0 82.4 81.5 76.2 94.8 90.7 88.5 77.3`

   `81.8 89.5 75.6 97.8 71.6 88.7 93.6 86.0 93.3 91.1`

   (a) faça um histograma dos dados
   (b) faça um diagrama ramo-e-folhas
   (c) faça um gráfico *boxplot*
   (d) obtenha a média e desvio padrão
   (e) obtenha o coeficiente de variação
   (f) obtenha a amplitude e a amplitude interquartílica
   (g) caracterize a distribuição dos dados

Solução:

(a) `> hist(x, main="", labels=T)`

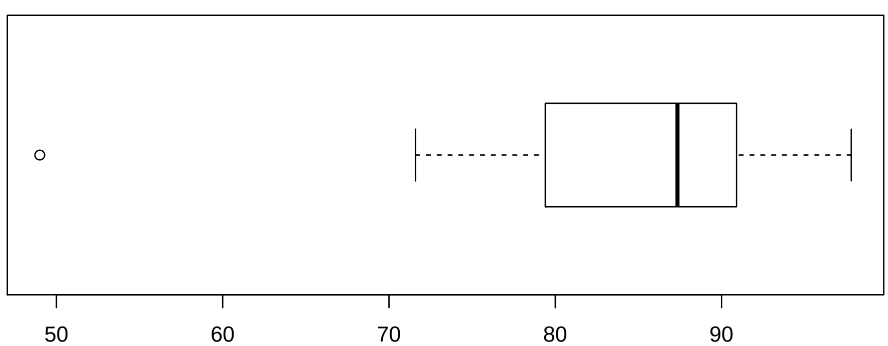


(b) `> stem(x)`

```
The decimal point is 1 digit(s) to the right of the |

4 | 9
5 |
6 |
7 | 2667
8 | 2226699
9 | 00113458
```

(c) `> boxplot(x, horizontal=T)`



(d) `> c(media=mean(x), desvioP = sd(x))`

```
media desvioP
84.26   10.91
```

(e) obtenha o coeficiente de variação

`> 100*sd(x)/mean(x)`

```
[1] 12.95
```

(f) `> range(x) ; diff(range(x))`

```
[1] 49.0 97.8
```

```
[1] 48.8
> fivenum(x)[c(2,4)]; diff(fivenum(x)[c(2,4)])
[1] 79.4 90.9
[1] 11.5
```

(g) Comentar sobre: posição, variabilidade, assimetria e dados discrepantes

---

3. Um estudo procurou relacionar medidas de um índice de poluição (PM10) com atendimentos hospitalares por doenças respiratórias. Foram anotados dados em vários períodos e em cinco capitais.

   Discuta estratégias para investigar a relação desejada a partir dos dados. Mencione que tipos de análises estatísticas descritivas poderiam ser feitas, os possíveis cenários (resultados) e como seriam interpretados. Comente sobre o que deveria ser levado em consideração nas análises.

4. (B. & M.) Um empreiteiro apresentou orçamentos separados para a execução da parte elétrica e da parte de encanamento de um edifício. Ele acha que a probabilidade de ganhar e concorrência da parte elétrica é de 1/2. Caso ganhe a parte elétrica, a chance de ganhar a parte de encanamento é de 3/4; caso contrário, essa probabilidade é de 1/3.

   (a) Qual a probabilidade de ele:
   - ganhar os dois contratos?
   - ganhar apenas um dos contratos?
   - não ganhar nenhum contrato?

   (b) os eventos "ganhar o contrato elétrico" e "ganhar o contrato hidráulico"
   - são independentes? (justifique)
   - são mutuamente exclusivos? (justifique)

   Solução:

$$
\begin{aligned}
G_1 &: \text{ ganhar concorrência da parte elétrica} \\
G_2 &: \text{ ganhar concorrência do encanamento} \\
P[G_1] = 1/2 \quad &; \quad P[G_2|G_1] = 3/4 \quad ; \quad P[G_2|\overline{G}_1] = 1/3 \\
P[\overline{G}_1] = 1/2 \quad &; \quad P[\overline{G}_2|G_1] = 1/4 \quad ; \quad P[\overline{G}_2|\overline{G}_1] = 2/3
\end{aligned}
$$

   (a)
   - $P[G_1 \cap G_2] = P[G_1] \cdot P[G_2|G_1] = (1/2) \cdot (3/4) = 3/8 = 0.375$
   - $P[G_1 \cap \overline{G}_2] + P[\overline{G}_1 \cap G_2] = P[G_1] \cdot P[\overline{G}_2|G_1] + P[\overline{G}_1] \cdot P[G_2|\overline{G}_1] = (1/2) \cdot (1/4) + (1/2) \cdot (1/3) = 7/24 = 0.292$
   - $P[\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2] = P[\overline{G}_1] \cdot P[\overline{G}_2|\overline{G}_1] = (1/2) \cdot (2/3) = 1/3 = 0.333$

   (b)
   - Não, pois $P[G_1 \cap G_2] = 3/8 \neq P[G_1] \cdot P[G_2] = 13/48$,
     em que $P[G_2] = P[G_2 \cap G_1] + P[G_2 \cap \overline{G}_1] = (3/8) + (1/6) = 13/24$
   - Não pois $P[G_1 \cap G_2] \neq 0$

5. Considere o lançamento de uma moeda 10 vezes.

   (a) Se voce lançar a probabilidade de obter a face "cara" em todos os lançamentos?

   (b) Considere agora que 1.000 pessoas fazem o mesmo. Qual a probabilidade de que alguém obtenha 10 "caras"?

   (c) Qual(ais) a(s) suposição(ções) feita(s) nos cálculos?

   (d) Discuta e interprete os resultados.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}
(1/2)^{10} &= 1/1024 = 0.00098 \\
&\text{ou} \\
&X : \text{número de caras em 10 lançamentos} \\
&X \sim B(n = 10, p = 1/2) \\
P[X = 10] &= \binom{10}{10}(1/2)^{10}(1-1/2)^{10-10} = 0.00098
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
1 - (1 - (1/2)^10)^{1000} &= 0.62358 \\
&\text{ou} \\
&Y : \text{número pessoas que obtém 10 caras} \\
&Y \sim B(n = 1000, p = (1/2)^10) \\
P[Y \geq 1] = 1 - P[Y = 0] = 1 - &\binom{1000}{0}[(1/2)^{10}]^0[1 - (1/2)^{10}]^{1000-0} = 0.62358
\end{aligned}$$

(c) Independência entre lançamentos, independência entre resultados de diferentes pessoas, probabilidades constantes de lançamentos de pessoas obterem 10 caras.

(d)

---

6. Registros de um laboratório mostram que 1 a cada 20 amostras de um determinado material são perdidas por contaminação. Responda cada um dos seguintes items declarando a variável aleatória e a sua distribuição.

   (a) Se forem feitas 15 análises qual a probabilidade de que no máximo uma seja contaminada.

   (b) Em um teste para avaliar a contaminação análises serão feitas sequencialmente até que a primeira contaminada seja encontrada. Quantas análises espera-se fazer? Como voce calcularia a probabilidade de que o esse número de análises não chegue a 5?

   (c) O teste anterior foi repetido porém até que a terceira análise mostrasse contaminação. Em um particular ensaio foram feitas 10 análise desta forma. Qual a probabilidade desta ocorrência?

   (d) Um lote contendo 40 amostas das quais 15 eram contaminadas foi enviado para teste em outro laboratório na qual 12 amostras foram selecionadas ao acaso para testes. Qual a probabilidade de encontrar 3 ou mais contaminadas entre as selecionadas?

   (e) Considere agora que o laboratório faz um grande número de análises por mês e registra uma média de 2,5 casos de contaminação grave. Qual a probabilidade de que em um determinado mês não se registre nenhuma contaminação? E de que seja registradas mais do que 5 contaminações?

Solução:

$$p = 1/20$$

(a)

$$\begin{aligned}
&X : \text{número de contaminadas em 15 análises} \\
&X \sim B(n = 15, p = 1/20) \\
P[X \leq 1] &= P[X = 0] + P[X = 1] = 0.829
\end{aligned}$$

(b)

X : número de análises **não contaminadas** até encontrar a primeira contaminada

$X \sim G(p = 1/20) \quad P[X = x] = p \cdot (1-p)^x, x = 0, 1, \ldots$

$$E[X] + 1 = \frac{1-p}{p} + 1 = \frac{1}{p} = 20$$

$$P[X < 4] = \sum_{i=0}^{4} P[X = i] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] + P[X = 4] = \sum_{i=0}^{4} (1/20)(1-1/20)^i =$$

(c)

X : número de análises **não contaminadas** até encontrar a terceira contaminada

$X \sim BN(r = 3, p = 1/20) \quad ; \quad P[X = x] = \binom{x+3-1}{3} (1/20)^3 \cdot (1-1/20)^x, x = 0, 1, \ldots$

10 análises $\longrightarrow$ 7 não contaminadas

$P[X = 7] = 0.0031$

(d)

X : número de amostras contaminadas entre as 12

$$X \sim HG(N = 40, r = 15, n = 12) \quad ; \quad P[X = x] = \frac{\binom{25}{12-x}\binom{15}{x}}{\binom{40}{12}}$$

$$P[X \geq 3] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - \sum_{i=0}^{2} P[X = i] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] - P[X = 2] = 0.9257$$

(e)

X : número de análises contaminadas em um mês

$$X \sim P(\lambda = 2,5) \quad P[X = x] = \frac{e^{-2,5} 2,5^x}{x!}, x = 0, 1, \ldots$$

$P[X = 0] = 0.0821$

$$P[X > 5] = 1 - P[X \leq 5] = 1 - (P[X = 0] + P[X = 1] + \ldots + P[X = 5]) = 1 - \sum_{i=0}^{5} \frac{e^{-2,5} 2,5^i}{i!} = 0.042$$

7.

(a) Conchas de mexilhões de uma certa espécie possuem, em uma certa região, possuem uma relação altura/comprimento com distribuição normal de média 0,5 e desvio padrão de 0,025. Os animais serão classificados de modo que 20% sejam considerados pequenos, 50% como médios e os restantes 30% como grandes. Quais os valores da relação altura/comprimento que definirão as classes de tamanho desejadas?

Solução:

$X \sim N(\mu = 0,5 \ ; \ \sigma^2 = (0,025)^2)$

$$P(X < x_1) = 0,20 \Longrightarrow P(Z < \frac{x_1 - 0,5}{0,025}) = 0,20 \Longrightarrow z_1 = -0.842 \Longrightarrow x_1 = \mu + z_1 \cdot \sigma = 0,5 + (-0.842) \cdot 0$$

$P(x_1 < X < x_2) = 0,50$

$P(X < x_1) = 0,20$

$$P(Z < \frac{x_2 - 0,5}{0,025}) = 0,70 \Longrightarrow z_2 = 0.524 \Longrightarrow x_2 = \mu + z_2 \cdot \sigma = 0,5 + 0.524 \cdot 0.025 = 0.513$$

(b) A durabilidade de um tipo de filtro é descrita por uma variável aleatória com distribuição normal de média 60.000 hrs de funcionamento e desvio padrão de 9.000 hrs.

   i. Se o fabricante garante a duração dos filtros pelas primeiras 47.500 hrs, qual a proporção de filtros que devem ser trocados pela garantia?
   ii. O que aconteceria com a proporção do item anterior se a garantia fosse para as primeiras 45.000 hrs?
   iii. Qual deveria ser a garantia (em hrs) de forma a assegurar que o fabricante trocaria sob garantia no máximo 4% dos filtros?
   iv. Se uma indústria comprar cinco (5) filtros, qual será a probabilidade de utilizar a garantia (de 45.000 hrs) para trocar ao menos um (1) dos filtros?

Solução:

$$X \sim N(60.000, 9.000^2)$$

i.

$$\begin{aligned} P[X < 47500] &= P[Z < \frac{47500 - 60000}{9000}] = P[Z < -1.389] = 0.082 \\ 100 \cdot P[X < 47500] &= 8.24\% dos filtros. \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} P[X < 45000] &= P[Z < \frac{45000 - 60000}{9000}] = P[Z < -1.667] = 0.048 \\ 100 \cdot P[X < 45000] &= 4.78\% dos filtros. \end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned} P[X < t] &= 0,04 \;\; ; \;\; t = ? \\ P[Z < \frac{t - 60000}{9000}] &= 0,04 \\ z &= -1.751 \\ \frac{t - 60000}{9000} &= -1.751 \\ t &= 60000 + 9000(-1.751) \\ t &= 44243.825 \end{aligned}$$

iv.

$$\begin{aligned} Y &: \text{ número de trocados sob garantia dentre 5 comprados} \\ Y &\sim B(n = 5, p = P[X < 45000] = 0.048) \\ P[Y \geq 1] &= 1 - P[Y = 0] = 0.217 \end{aligned}$$

---

8. Para efetuar o monitoramento de poluentes em uma determinada área foram coletadas amostras. Os valores obtidos para um determinado elemento poluente são fornecidos a seguir.

```
[1] 39.7 33.9 43.3 36.3 37.6 27.2 34.6 36.6 35.2 37.8 34.7 37.9
```

(a) Caracterize o nível de poluição (deste elemento) na área através de um resumo estatístico adequado dos dados.

(b) Qual valor voce escolheria para estimar o nível de poluição na área?

(c) Qual a estimativa deste valor? Como voce representaria a incerteza sobre este estimativa?

(d) A legislação afirma que se o teor estiver acima de 35 unidades a área deve ser considerada contaminada e sujeita a intervenção de controle. Baseando-se nos dados, voce indicaria a intervenção na área?

9. Na avaliação da semana passada foi considerado o seguinte problema:

   Para efetuar o monitoramento de poluentes em uma determinada área foram coletadas amostras. Os valores obtidos para um determinado elemento poluente são fornecidos a seguir. A legislação afirma que se o teor estiver acima de 35 unidades a área deve ser considerada contaminada e sujeita a intervenção de controle.

```
[1] 39.7 33.9 43.3 36.3 37.6 27.2 34.6 36.6 35.2 37.8 34.7 37.9
```

   Em um relatório foram reportadas análises dos dados que incluiam as informações a seguir.

   O nível de poluição na área expresso pela média aritmética dos valores medidos nas amostras é de 36.23 $u.m.$[1]. A margem de erro é de 1.9 $u.m.$ obtida pela expressão $z \cdot 4/\sqrt{12}$ com $z = 1.645$ obtido da distribuição normal, e considerando-se que a variância dos teores é de 16 $u.m.^2$.

   (a) Na análise estatística, qual a população, a variável aleatória e a amostra no contexto deste problema?
   (b) Qual o estimador escolhido e as estimativa pontual obtida?
   (c) Qual a estimativa intervalar e seu nível de confiança?
   (d) Quais as suposições utilizadas nas análise?
   (e) Como os resultados poderiam ser utilizados para determinar se deve ou não haver intervenção na área?
   (f) Qual deveria ser o tamanho da amostra para que a margem de erro fosse de no máximo $1,2 u.m.$?

---

10. (a) Considere uma pesquisa para estimar a proporção de votos de um determinado candidato.
   i. Qual o tamanho necessário de uma amostra para uma margem de erro de 2,5% e confiança de 95% ?
   ii. Comente sobre as suposições feitas para o cálculo anterior.

   Solução:

   i.
$$\begin{aligned} X &\sim B(\theta) \\ \mu_x &= E[X] = \theta \\ \sigma^2_X &= Var[X] = \theta(1-\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\theta} &\approx N(\mu_{\overline{X}} = \mu_X = \theta; \sigma^2_{\overline{X}} = \sigma^2_X/n = \frac{\theta(1-\theta)}{n}) \\ M.E. &= z\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}} = 0,025 \\ &\text{assumindo } \theta = 1/2 \\ M.E. &= 1.96\frac{1}{\sqrt{4 \cdot n}} = 0,025 \\ n &= \frac{1,96^2}{4 \cdot 0,025^2} = 1537 \end{aligned}$$

   ii.

   (b) Assume-se que o tempo de votação em uma urna eletrônica possui distribuição uniforme com valores entre 5 e 30 segundos. Considere um grupo de 50 votantes.
   i. Qual a probabilidade do último votante gastar mais que 20 segundos?
   ii. Qual a probabilidade do tempo de votação de todo o grupo ser superior a 15 minutos?
   iii. Comente sobre as suposições feitas para o cálculo anterior.

[1] $u.m.$: unidade de medida

Solução:

$$X \sim U(5, 30)$$
$$\mu_x = E[X] = \frac{a+b}{2} = \frac{5+30}{2} = 17,5$$
$$\sigma_X^2 = Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(30-5)^2}{12} = 52.08$$

i. $P[X > 20] = \frac{30-20}{30-5} = 0.4$

ii.

$$\overline{X} \approx N(\mu_{\overline{X}} = \mu_X = 17,5 \ \ ; \ \ \sigma_{\overline{X}}^2 = \sigma_X^2/n = 1.04)$$
$$P[\sum_{i=1}^{50} X_i > 15' \cdot 60] = P[\frac{\sum_{i=1}^{50} X_i}{50} > \frac{15 \cdot 60''}{50}] = P[\overline{X} > 18] = 0.31$$

iii.
