Universidade Federal do Paraná
Seminário de Bioestatistica

Teste de Wilcoxon

Danielle Pierin
Olivia Cleto

Teste de Postos com Sinais de Wilcoxon para Pares Combinados

- Esse teste é usado com dados amostrais em pares.
- Usando postos, considera o tamanho das diferenças.

Definição de postos: os dados estão ordenados quando estão arranjados de acordo com algum critério, como por exemplo de menor pra maior. Um **posto** é um numero atribuído a um item amostral individual de acordo com sua posição na lista ordenada. Ao primeiro item atribui-se o posto 1, ao segundo item o posto 2, e assim por diante.

O teste de postos com sinais de Wilcoxon é um teste nao-paramétrico que usa os postos de dados amostrais compostos de pares combinados. É usado pra testar diferenças nas distribuições populacionais, de modo que as hipóteses nula e alternativa são:

H_0: as duas amostras provém de populações com a mesma distribuição.

H_1: as duas amostras provém de populações com distribuições diferentes.

Obs: Esse teste pode ser usado também para testar a afirmativa de que uma amostra provém de uma população com uma mediana especificada.

Procedimento:

Passo 1: Pra cada par de dados, ache a diferença *d,* subtraindo o segundo valor do primeiro. Conserve os sinais, mas ignore quaisquer pares para os quais $d = 0$.

Passo 2: Ignore os sinais das diferenças, ordene-as da menor para a maior e as substitua pelo valor do posto correspondente. Quando as diferenças tiverem o mesmo valor numérico, associe a elas a media dos postos envolvidos no empate.

Passo 3: Atribua a cada posto o sinal da diferença que o originou. Ou seja, insira os sinais ignorados nos Passo 2.

Passo 4: Ache a soma dos valores absolutos dos postos negativos. Ache a soma dos postos positivos.

Passo 5: Seja T a menor das duas somas encontradas no Passo 4. Qualquer das somas poderia ser usada, mas, para um procedimento simplificado, selecionamos arbitrariamente a menor delas.

Passo 6: Seja n o numero de pares de dados para os quais a diferença d não é 0.

Passo 7: Determine a estatística de teste e os valores críticos com base no tamanho amostral, conforme mostrado a seguir.

Passo 8: Ao formar a conclusão, rejeite a hipótese nula se os dados amostrais levarem a uma estatística de teste que esteja na região critica - isto é, se a estatística de teste for menor do que ou igual ao(s) valor(es) critico(s). Em caso contrário, deixe de rejeitar a hipótese nula.

Suposições:

1. Os dados consistem em pares combinados selecionados aleatoriamente.
2. A população das diferenças (encontradas a partir dos pares de dados) tem uma distribuição que é aproximadamente simétrica, o que significa que a metade esquerda de seu histograma é aproximadamente uma imagem refletida de sua metade direita. (Não há qualquer exigência de que os dados tenham uma distribuição normal).

Notação:

Veja os passos anteriores pra encontrar a soma dos postos *T*.

T = à menor das duas somas seguintes:

1. A soma dos valores absolutos dos postos negativos das diferenças *d* não-nulas.
2. A soma dos postos positivos das diferenças *d* não-nulas.

Estatística de teste:

Se $n \leqslant 30$, a estatística de teste é *T.*

Se $n > 30$, a estatística de teste é

$$z = \frac{T - \dfrac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$$

Valores críticos:

Se $n \leqslant 30$, o valor crítico *T* é encontrado na Tabela A-8.
Se $n > 30$, os valores críticos *z* são encontrados na Tabela A-2.

Exemplo: Medida da inteligência de crianças.

Os dados da tabela 12-3 são pares combinados de tempos (em segundos) obtidos de uma amostra aleatória de crianças às quais foram dados blocos com a instrução de construírem a torre mais alta possível (com base em dados de “Tower Building” , de Johnson e Courtney, Vol. 3). Esse procedimento é usado pra medir a inteligência de crianças. Use o teste de postos com sinais de Wilcoxon e um nivel de significância de 0,05 pra testar a afirmativa de que não há diferença entre os tempos da primeira e da segunda tentativas.

Solução: As hipóteses nula e alternativa são:

H_0: Não há diferença entre os tempos da primeira e da segunda tentativas.

H_1: Há uma diferença entre os tempos da primeira e segunda tentativas.

O nivel de significância é α = 0,05. A estatística de teste se calcula seguindo os oito passos apresentados anteriormente.

Passo 1: Na tabela 12-3, obtém-se a linha de diferenças se calculando a diferença para cada par de dados:

d = tempo da primeira tentativa - tempo da segunda tentativa

Passo 2: Ignorando seus sinais, ordenamos os valores absolutos dessas diferenças da menor pra maior. Note que os empates em postos são tratados associando-se a media dos postos envolvidos a cada um dos valores empatados, e a diferença 0 é descartada.

Passo 3: Cria-se a linha inferior da tabela 12-3 atribuindo-se a cada posto o sinal da diferença correspondente. Se realmente nao houver diferença entre os tempos da primeira e da segunda tentativas (como na hipotese nula), esperamos que o numero de postos positivos seja aproximadamente igual ao numero de postos negativos.

Tabela 12-3 Tempos para a Construção de Torres de Blocos

Criança	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Primeira tentativa	30	19	19	23	29	178	42	20	12	39	14	81	17	31	52
Segunda tentativa	30	6	14	8	14	52	14	22	17	8	11	30	14	17	15
Diferenças *d*	0	13	5	15	15	126	28	−2	−5	31	3	51	3	14	37
Postos de |diferenças|		6	4,5	8,5	8,5	14	10	1	4,5	11	2,5	13	2,5	7	12
Postos com sinais		6	4,5	8,5	8,5	14	10	−1	−4,5	11	2,5	13	2,5	7	12

Passo 4: Encontramos, agora, a soma dos valores absolutos dos postos negativos (5,5) e também a soma dos postos positivos (99,5).

Passo 5: Fazendo T = à menor das duas somas encontradas, temos que T = 5,5.

Passo 6: Fazendo n igual ao numero de pares de dados para os quais a diferença d não é 0, temos n = 14.

Passo 7: Como n = 14, temos $n \leqslant 30$, de modo que usamos a estatística de teste T = 5,5 (e não calculamos a estatística de teste z). Também, como $n \leqslant 30$, usamos a tabela A-8 pra encontrar o valor crítico de 21.

Passo 8: A estatística de teste T = 5,5 é menor do que ou igual ao valor crítico de 21, de modo que rejeitamos a hipótese nula. Parece haver uma diferença entre os tempos da primeira e da segunda tentativas.

Fundamentos:

- Nesse exemplo, os postos sem sinais de 1 a 14 têm um total de 105, de modo que se não houvesse diferenças significativas, cada um dos dois totais de postos com sinais deveria ser cerca de *105/2* ou 52.5. Ou seja, os postos negativos e os postos positivos se separariam em 52,5 - 52,5 aproximadamente, tal como 51 - 54.
- A tabela de valores críticos mostra que, ao nivel de significância de 0,05 com 14 pares de dados, uma separação 21 - 84 representa um afastamento significativo da hipotese nula. Reciprocamente, separações como 22 - 83 não apresentam afastamentos significativos da separação 52,5 - 52,5 e nao justificariam a rejeição da hipotese nula.
- O teste de postos com sinais de Wilcoxon se baseia no menor total de postos, de modo que, em vez de analisarmos ambos os numeros que constituem a separação, podemos considerar apenas o menor.
- A soma 1+2+3..+*n* de todos os postos é igual a *n(n+1)/2,* e se essa é uma soma de postos a ser dividida igualmente entre duas categorias (positivos e negativos), cada um dos dois totais deve ficar proximo de *n (n+1)/4*, que é metade de *n(n+1)/2*.
- A compreensão desse principio nos ajuda a entender a estatistica de teste usada quando $n > 0$. O denominador naquela expressão representa um desvio padrão de *T* e se baseia no fato de que

$$1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Teste da soma de postos de wilcoxon para duas amostras independentes

- A base do processo utilizado no teste de postos de wilcoxon é o principio de que, se duas amostras são extraídas de populações idênticas e os escores são dispostos em uma sequência única, combinada, de valores, então os postos altos e os postos baixos devem situar-se justamente entre duas amostras.
- Se os postos baixos predominam em uma amostra, e os postos altos predominam na outra, então suspeitamos que as populações não sejam idênticas.

Suposições:

1. temos duas amostras independentes.
2. estamos testando a hipótese nula, de que as duas amostras independentes provem da mesma distribuição; a hipótese alternativa é a afirmação de que as duas distribuições apresentem alguma diferença.
3. cada uma das duas amostras tem mais de 10 escores, ou valores.

- Não exige que as populações sejam distribuídas normalmente
- pode ser aplicado a dados no nível ordinal de mensuração.
- na tabela 13-1 vemos que o teste da soma de postos de wilcoxon tem 0,95 de eficiências em comparação com os testes paramétricos *t* ou *z*.

TABELA 13-1 Comparação de Testes Paramétricos e Testes Não-paramétricos

Aplicação	Teste Paramétrico	Teste Não-paramétrico	Eficiência de um Teste Não-paramétrico com uma População Normal
Duas amostras dependentes (dados emparelhados)	Teste *t* ou teste *z*	Teste dos sinais	0,63
		Teste de postos com sinais de Wilcoxon	0,95
Duas amostras independentes	Teste *t* ou teste *z*	Teste da soma de postos de Wilcoxon	0,95
Várias amostras independentes	Análise da variância (teste *F*)	Teste de Kruskal-Wallis	0,95
Correlação	Correlação linear	Teste da correlação por postos	0,91
Aleatoriedade	Teste não-paramétrico	Teste de repetições	Não há base para comparação

- O processo de teste da soma de postos de Wilcoxon começa com os seguintes passos:

1. ordenar todos os dados amostrais combinados
2. achar a soma dos postos para uma das duas amostras

- Na notação que segue, qualquer amostra pode ser usada como amostra 1.

Notação para o Teste da Soma de Postos de Wilcoxon

n_1 = tamanho da amostra 1
n_2 = tamanho da amostra 2
R_1 = soma de postos da amostra 1
R_2 = soma de postos da amostra 2
R = mesmo que R_1 (soma de postos para a amostra 1)
μ_R = média dos valores da amostra R, esperada quando as duas populações são idênticas
σ_R = desvio-padrão dos valores da amostra R, esperado quando as duas populações são idênticas

- Se ao testarmos a hipótese nula de populações idênticas, ambas as amostras tiverem tamanho superior a 10, então a distribuição amostral de *R* é aproximadamente normal com média e desvio-padrão e a estatística de teste é a seguinte:

Estatísticas de Teste para o Teste da Soma de Postos de Wilcoxon para Duas Amostras Independentes

$$z = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R}$$

onde $\mu_R = \dfrac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2}$

onde $\sigma_R = \sqrt{\dfrac{n_1 n_2(n_1 + n_2 + 1)}{12}}$

n_1 = tamanho da amostra para a qual é achada a soma de postos R

n_2 = tamanho da outra amostra

R = soma dos postos da amostra de tamanho n_1

- A expressão de média é uma variante do seguinte resultado da indução matemática: A soma dos *n* primeiros inteiros positivos é dada por 1 + 2 + 3 + … + *n* = *n* (*n* + 1) / 2. A expressão de desvio-padrão é uma variante de um resultado que afirma que os inteiros 1, 2, 3 …, *n* tem desvio padrão $\sqrt{(n^2 - 1)/12}$.

<u>Obs:</u> *Como a estatística de teste se baseia na distribuição normal, os valores críticos podem ser achados na tabela de distribuição normal padronizada (z)*

EXEMPLO: Extraem-se amostras aleatórias de confeitos M&M, pesando-se os de cores vermelhas e amarela, com os resultados que estão na tabela. Com o nível de 0.05 de significância, teste a alegação que os pesos dos confeitos M&M vermelhos e dos confeitos amarelos tem a mesma distribuição.

TABELA:

Pesos (gramas) de M&M			
Vermelho		Amarelo	
0,870	(2)	0,906	(19)
0,933	(35)	0,978	(45)
0,952	(42)	0,926	(34)
0,908	(21)	0,868	(1)
0,911	(24.5)	0,876	(5)
0,908	(21)	0,968	(44)
0,913	(27)	0,921	(30)
0,983	(46)	0,893	(15)
0,920	(29)	0,939	(38)
0,936	(37)	0,886	(10.5)
0,891	(13)	0,924	(32)
0,924	(32)	0,910	(23)
0,874	(4)	0,877	(6)
0,908	(21)	0,879	(7.5)
0,924	(32)	0,941	(40)
0,897	(16)	0,879	(7.5)
0,912	(26)	0,940	(39)
0,888	(12)	0,960	(43)
0,872	(3)	0,989	(47)
0,898	(17)	0,900	(18)
0,882	(9)	0,917	(28)
		0,911	(24.5)
		0,892	(14)
		0,886	(10.5)
		0,949	(41)
		0,934	(36)
$n_1 = 21$		$n_2 = 26$	
$R_1 = 469{,}5$		$R_2 = 658{,}5$	

SOLUÇÃO: as hipóteses nulas e alternativa são:

H_0: Os confeitos M&M vermelhos e amarelos tem pesos com populações idênticas.

H_1: as duas populações não são idênticas.

- Ordene todos os 47 pesos combinados, com o posto 1 atribuído ao menor peso de 0,868g. Os empates em postos são considerados conforme seção 13-1: Ache as medias dos postos em jogo e atribua este posto médio a cada um dos valores empatados. Os postos correspondentes aos valores amostrais individuais são dados na tabela entre parenteses. *R* denota a soma dos pontos para a amostra que escolhemos como amostra 1.

Escolhendo os M&M vermelhos, obtemos:

$$\mathbf{R = 2 + 35 + 42 + \ldots + 9 = 469{,}5}$$

- Como há 21 M&M vermelhos, temos n1 = 21. E n2 = 26, porque há 26 M&M amarelos. Podemos agora determinar os valores de média, desvio-padrão e a estatística de teste *z*.

$$\mu_R = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2} = \frac{21(21 + 26 + 1)}{2} = 504$$

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1 + n_2 + 1)}{12}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(21)(26)(21 + 26 + 1)}{12}} = 46{,}73$$

$$z = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} = \frac{469{,}5 - 504}{46{,}73} = -0{,}74$$

- O teste é bilateral por que um grande valor positivo de *z* indicaria que os postos mais altos se encontram desproporcionadamente na primeira amostra, e um grande valor negativo de *z* indicaria uma parcela desproporcionada de postos mais baixos. Em ambos os casos, teríamos forte evidencia contra a afirmação que as amostras provenham de populações idênticas.

- Estamos agora testando (com α = 0.05) a hipótese de que as duas populações sejam a mesma; temos, pois, um teste bilateral com valores críticos *z* 1,96 e - 1,96. A estatística de teste *z* = -0,74 não está na região critica, pelo que não rejeitamos a hipótese nula, de que os confeitos M&M vermelho e amarelo tenham o mesmo peso.

- Pode-se verificar que, permutando-se os dois conjuntos de pesos e considerando a amostra de M&M amarelos como a primeira, *R* = 658,5; média = 624; desvio-padrão = 46,73 e *z* = 0,74, de forma que a conclusão é a mesma.

REFERÊNCIAS

- Livro Introdução à estatística - Mario F. Triola
- people.ufpr.br/~prbg/public_html/ce050/apostcap3a.PDF
- http://www.apis2.com.br/?page_id=265
- docentes.esa.ipcb.pt/mede/apontamentos/testes_nao_parametricos.pdf
- leg.ufpr.br/~silvia/CE055/node97.html

Obrigada!!