Universidade Federal do Paraná Seminário de Bioestatistica

Teste de Wilcoxon

Danielle Pierin Olivia Cleto

Teste de Postos com Sinais de Wilcoxon para Pares Combinados

- Esse teste é usado com dados amostrais em pares.
- Usando postos, considera o tamanho das diferenças.

Definição de postos: os dados estão ordenados quando estão arranjados de acordo com algum critério, como por exemplo de menor pra maior. Um **posto** é um numero atribuído a um item amostral individual de acordo com sua posição na lista ordenada. Ao primeiro item atribui-se o posto 1, ao segundo item o posto 2, e assim por diante.

O teste de postos com sinais de Wilcoxon é um teste nao-paramétrico que usa os postos de dados amostrais compostos de pares combinados. É usado pra testar diferenças nas distribuições populacionais, de modo que as hipóteses nula e alternativa são:

H₀: as duas amostras provém de populações com a mesma distribuição.

H₁: as duas amostras provém de populações com distribuições diferentes.

Obs: Esse teste pode ser usado também para testar a afirmativa de que uma amostra provém de uma população com uma mediana especificada.

Procedimento:

- **Passo 1:** Pra cada par de dados, ache a diferença d, subtraindo o segundo valor do primeiro. Conserve os sinais, mas ignore quaisquer pares para os quais d = 0.
- **Passo 2:** Ignore os sinais das diferenças, ordene-as da menor para a maior e as substitua pelo valor do posto correspondente. Quando as diferenças tiverem o mesmo valor numérico, associe a elas a media dos postos envolvidos no empate.
- **Passo 3:** Atribua a cada posto o sinal da diferença que o originou. Ou seja, insira os sinais ignorados nos Passo 2.
- Passo 4: Ache a soma dos valores absolutos dos postos negativos. Ache a soma dos postos positivos.
- **Passo 5:** Seja *T* a menor das duas somas encontradas no Passo 4. Qualquer das somas poderia ser usada, mas, para um procedimento simplificado, selecionamos arbitrariamente a menor delas.
- **Passo 6:** Seja *n* o numero de pares de dados para os quais a diferença *d* não é 0.
- **Passo 7:** Determine a estatística de teste e os valores críticos com base no tamanho amostral, conforme mostrado a seguir.
- **Passo 8:** Ao formar a conclusão, rejeite a hipótese nula se os dados amostrais levarem a uma estatística de teste que esteja na região critica isto é, se a estatística de teste for menor do que ou igual ao(s) valor(es) critico(s). Em caso contrário, deixe de rejeitar a hipótese nula.

Suposições:

- Os dados consistem em pares combinados selecionados aleatoriamente.
- 2. A população das diferenças (encontradas a partir dos pares de dados) tem uma distribuição que é aproximadamente simétrica, o que significa que a metade esquerda de seu histograma é aproximadamente uma imagem refletida de sua metade direita. (Não há qualquer exigência de que os dados tenham uma distribuição normal).

Notação:

Veja os passos anteriores pra encontrar a soma dos postos *T*.

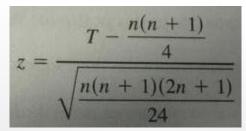
T = à menor das duas somas seguintes:

- 1. A soma dos valores absolutos dos postos negativos das diferenças d não-nulas.
- 2. A soma dos postos positivos das diferenças d não-nulas.

Estatística de teste:

Se $n \leq 30$, a estatística de teste é T.

Se n > 30, a estatística de teste é



Valores críticos:

Se $n \le 30$, o valor crítico T é encontrado na Tabela A-8. Se n > 30, os valores críticos z são encontrados na Tabela A-2.

Exemplo: Medida da inteligência de crianças.

Os dados da tabela 12-3 são pares combinados de tempos (em segundos) obtidos de uma amostra aleatória de crianças às quais foram dados blocos com a instrução de construírem a torre mais alta possível (com base em dados de "Tower Building", de Johnson e Courtney, Vol. 3). Esse procedimento é usado pra medir a inteligência de crianças. Use o teste de postos com sinais de Wilcoxon e um nivel de significância de 0,05 pra testar a afirmativa de que não há diferença entre os tempos da primeira e da segunda tentativas.

Solução: As hipóteses nula e alternativa são:

- : Não há diferença entre os tempos da primeira e da segunda tentativas.
- H₀ : Há uma diferença entre os tempos da primeira e segunda tentativas.
- nivel de significância é = 0.05. A estatística de teste se calcula seguindo os oito passos apresentados anteriormente.
- Passo 1: Na tabela 12-3, obtém-se a linha de diferenças se calculando a diferença para cada par de dados:
- d = tempo da primeira tentativa tempo da segunda tentativa
- **Passo 2:** Ignorando seus sinais, ordenamos os valores absolutos dessas diferenças da menor pra maior. Note que os empates em postos são tratados associando-se a media dos postos envolvidos a cada um dos valores empatados, e a diferença 0 é descartada.

Passo 3: Cria-se a linha inferior da tabela 12-3 atribuindo-se a cada posto o sinal da diferença correspondente. Se realmente nao houver diferença entre os tempos da primeira e da segunda tentativas (como na hipotese nula), esperamos que o numero de postos positivos seja aproximadamente igual ao numero de postos negativos.

Criança	Α	В	C	D	E	F	G	Н	1	1	K	L	М	N	0
Primeira tentativa	30	19	19	23	29	178	42	20	12	39	14	81	17	31	52
Segunda tentativa	30	6	14	8	14	52	14	22	17	8	11	30	14	17	15
Diferenças d	0	13	5	15	15	126	28	-2	-5	31	3	51	3	14	37
Postos de Idiferençasl		6	4,5	8,5	8,5	14	10	1	4,5	11	2,5	13	2,5	7	12
Postos com sinais		6	4,5	8,5	8,5	14	10	-1	-4,5	11	2,5	13	2,5	7	12

Passo 4: Encontramos, agora, a soma dos valores absolutos dos postos negativos (5,5) e também a soma dos postos positivos (99,5).

Passo 5: Fazendo T =à menor das duas somas encontradas, temos que T = 5,5.

Passo 6: Fazendo n igual ao numero de pares de dados para os quais a diferença d não é 0, temos n = 14.

Passo 7: Como n = 14, temos $n \le 30$, de modo que usamos a estatística de teste T = 5,5 (e não calculamos a estatística de teste z). Também, como $n \le 30$, usamos a tabela A-8 pra encontrar o valor crítico de 21.

Passo 8: A estatística de teste T = 5,5 é menor do que ou igual ao valor crítico de 21, de modo que rejeitamos a hipótese nula. Parece haver uma diferença entre os tempos da primeira e da segunda tentativas.

Fundamentos:

- Nesse exemplo, os postos sem sinais de 1 a 14 têm um total de 105, de modo que se não houvesse diferenças significativas, cada um dos dois totais de postos com sinais deveria ser cerca de 105/2 ou 52.5.
 Ou seja, os postos negativos e os postos positivos se separariam em 52,5 - 52,5 aproximadamente, tal como 51 - 54.
- A tabela de valores críticos mostra que, ao nivel de significância de 0,05 com 14 pares de dados, uma separação 21 - 84 representa um afastamento significativo da hipotese nula. Reciprocamente, separações como 22 - 83 não apresentam afastamentos significativos da separação 52,5 - 52,5 e nao justificariam a rejeição da hipotese nula.
- O teste de postos com sinais de Wilcoxon se baseia no menor total de postos, de modo que, em vez de analisarmos ambos os numeros que constituem a separação, podemos considerar apenas o menor.
- A soma 1+2+3..+n de todos os postos é igual a n(n+1)/2, e se essa é uma soma de postos a ser dividida igualmente entre duas categorias (positivos e negativos), cada um dos dois totais deve ficar proximo de n(n+1)/4, que é metade de n(n+1)/2.
- A compreensão desse principio nos ajuda a entender a estatistica de teste usada quando n >0. O denominador naquela expressão representa um desvio padrão de T e se baseia no fato de que

$$1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Teste da soma de postos de wilcoxon para duas amostras independentes

- A base do processo utilizado no teste de postos de wilcoxon é o principio de que, se duas amostras são extraídas de populações idênticas e os escores são dispostos em uma sequência única, combinada, de valores, então os postos altos e os postos baixos devem situar-se justamente entre duas amostras.
- Se os postos baixos predominam em uma amostra, e os postos altos predominam na outra, então suspeitamos que as populações não sejam idênticas.

Suposições:

- 1. temos duas amostras independentes.
- 2. estamos testando a hipótese nula, de que as duas amostras independentes provem da mesma distribuição; a hipótese alternativa é a afirmação de que as duas distribuições apresentem alguma diferença.
- 3. cada uma das duas amostras tem mais de 10 escores, ou valores.

- Não exige que as populações sejam distribuídas normalmente
- pode ser aplicado a dados no nível ordinal de mensuração.
- na tabela 13-1 vemos que o teste da soma de postos de wilcoxon tem 0,95 de eficiências em comparação com os testes paramétricos *t* ou *z*.

TABELA 13-1 Comparação de Testes Paramétricos e Testes Não-paramétricos

Aplicação	Teste Paramétrico	Teste Não-paramétrico	Eficiência de um Teste Não-paramétrico com uma População Normal		
Duas amostras	Teste t ou teste z	Teste dos sinais	0,63		
dependentes (dados emparelhados)		Teste de postos com sinais de Wilcoxon	0,95		
Duas amostras independentes	Teste t ou teste z	Teste da soma de postos de Wilcoxon	0,95		
Várias amostras ndependentes	Análise da variância (teste F)	Teste de Kruskal-Wallis	0,95		
Correlação	Correlação linear	Teste da correlação por postos	0,91		
Aleatoriedade	Teste não-paramétrico	Teste de repetições	Não há base para comparação		

- O processo de teste da soma de postos de Wilcoxon começa com os seguintes passos:
- 1. ordenar todos os dados amostrais combinados
- 2. achar a soma dos postos para uma das duas amostras
- Na notação que segue, qualquer amostra pode ser usada como amostra 1.

```
Notação para o Teste da Soma de Postos de
 Wilcoxon
n_1 = \text{tamanho da amostra 1}
n_2 = tamanho da amostra 2
R_1 = \text{soma de postos da amostra } 1
R_2 = soma de postos da amostra 2
R = \text{mesmo que } R_1 \text{ (soma de postos para a amostra 1)}
\mu_R = média dos valores da amostra R, esperada quando as
       duas populações são idênticas
\sigma_{\rm p} = {\rm desvio}-padrão dos valores da amostra R, esperado
      quando as duas populações são idênticas
```

• Se ao testarmos a hipótese nula de populações idênticas, ambas as amostras tiverem tamanho superior a 10, então a distribuição amostral de *R* é aproximadamente normal com média e desvio-padrão e a estatística de teste é a seguinte:

Estatísticas de Teste para o Teste da Soma de Postos de Wilcoxon para Duas Amostras Independentes
$$z = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R}$$
 onde $\mu_R = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2}$ onde $\sigma_R = \sqrt{\frac{n_1n_2(n_1 + n_2 + 1)}{12}}$ $n_1 = \text{tamanho da amostra para a qual \'e achada a soma de postos } R$ $n_2 = \text{tamanho da outra amostra}$ $R = \text{soma dos postos da amostra de tamanho } n_1$

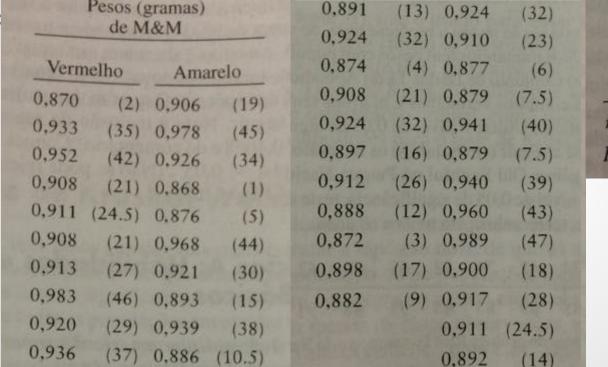
A expressão de média é uma variante do seguinte resultado da indução matemática: A soma dos n primeiros inteiros positivos é dada por 1 + 2 + 3 + ... + n = n (n + 1) / 2. A expressão de desvio-padrão é uma variante de um resultado que afirma que os inteiros 1, 2, 3 ..., n tem desvio padrão

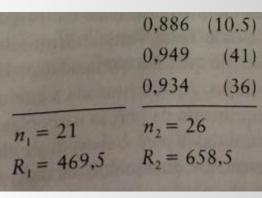
$$\sqrt{(n^2-1)/12}.$$

Obs: Como a estatística de teste se baseia na distribuição normal, os valores críticos podem ser achados na tabela de distribuição normal padronizada (z)

EXEMPLO: Extraem-se amostras aleatórias de confeitos M&M, pesando-se os de cores vermelhas e amarela, com os resultados que estão na tabela. Com o nível de 0.05 de significância, teste a alegação que os pesos dos confeitos M&M vermelhos e dos confeitos amarelos tem a mesma distribuição.

TABELA:





SOLUÇÃO: as hipóteses nulas e alternativa são:

H₀: Os confeitos M&M vermelhos e amarelos tem pesos com populações idênticas.

H₁: as duas populações não são idênticas.

 Ordene todos os 47 pesos combinados, com o posto 1 atribuído ao menor peso de 0,868g. Os empates em postos são considerados conforme seção 13-1: Ache as medias dos postos em jogo e atribua este posto médio a cada um dos valores empatados. Os postos correspondentes aos valores amostrais individuais são dados na tabela entre parenteses. R denota a soma dos pontos para a amostra que escolhemos como amostra 1.

Escolhendo os M&M vermelhos, obtemos:

$$R = 2 + 35 + 42 + \dots + 9 = 469,5$$

• Como há 21 M&M vermelhos, temos n1 = 21. E n2 = 26, porque há 26 M&M amarelos. Podemos agora determinar os valores de média, desvio-padrão e a estatística de teste z.

$$\mu_R = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2} = \frac{21(21 + 26 + 1)}{2} = 504$$

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1 + n_2 + 1)}{12}} = \frac{12}{12}$$

$$= \sqrt{\frac{(21)(26)(21 + 26 + 1)}{12}} = 46,73$$

$$z = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} = \frac{469,5 - 504}{46,73} = -0,74$$

 O teste é bilateral por que um grande valor positivo de z indicaria que os postos mais altos se encontram desproporcionadamente na primeira amostra, e um grande valor negativo de z indicaria uma parcela desproporcionada de postos mais baixos. Em ambos os casos, teríamos forte evidencia contra a afirmação que as amostras provenham de populações idênticas.

- Estamos agora testando (com Q = 0.05) a hipótese de que as duas populações sejam a mesma; temos, pois, um teste bilateral com valores críticos z 1,96 e 1,96. A estatística de teste z = -0,74 não está na região critica, pelo que não rejeitamos a hipótese nula, de que os confeitos M&M vermelho e amarelo tenham o mesmo peso.
- Pode-se verificar que, permutando-se os dois conjuntos de pesos e considerando a amostra de M&M amarelos como a primeira, R = 658,5; média = 624; desvio-padrão = 46,73 e z = 0,74, de forma que a conclusão é a mesma.

REFERÊNCIAS

- Livro Introdução à estatística Mario F. Triola
- people.ufpr.br/~prbg/public_html/ce050/apostcap3a.PDF
- http://www.apis2.com.br/?page_id=265
- docentes.esa.ipcb.pt/mede/apontamentos/testes_nao_parametricos.pdf
- leg.ufpr.br/~silvia/CE055/node97.html

