UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CE001 - BIOESTATÍSTICA

TESTE DO QUI-QUADRADO

Ana Paula Araujo Correa
Eder Queiroz
Newton Trevisan

DEFINIÇÃO

- É um teste de hipóteses que se destina a encontrar um valor da dispersão para duas variáveis **categóricas nominais** e avaliar a associação existente entre variáveis qualitativas.
- TESTE NÃO PARAMÉTRICO: não depende de parâmetros populacionais (média e variância).
- O princípio básico deste teste é **<u>comparar proporções</u>**, ou seja, possíveis divergências entre as frequências observadas e esperadas para um certo evento.

APLICAÇÕES DO TESTE

- O teste é utilizado para:

  Verificar se a frequência com que um determinado acontecimento observado em uma amostra se desvia significativamente ou não da frequência com que ele é esperado.

  Comparar a distribuição de diversos acontecimentos em diferentes amostras, a fim de avaliar se as proporções observadas destes eventos mostram ou não diferenças significativas ou se as amostras diferem significativamente quanto às proporções desses acontecimentos.

CONDIÇÕES

- Os grupos devem ser independentes,
- Os itens de cada grupo são selecionados aleatoriamente,
- As observações devem ser frequências ou contagens,
- Cada observação pertence a uma e somente uma categoria
- A amostra deve ser relativamente grande (pelo menos 5 observações em cada célula e, no caso de poucos grupos, pelo menos 10. Exemplo: em tabelas 2x 2).

COMO CALCULAR

- Para avaliar as possíveis discrepâncias entre proporções observadas e esperadas:

$$\frac{(o-e)^2}{e}$$

em que,
o = frequência observada para cada classe
e = frequência esperada para aquela classe

- A media dos desvios e nula, porem a elevacao ao quadrado transforma todos os desvios em valores positivos, tornando possível a soma dos desvios sem haver cancelamento.
- O desvio (o - e) entre cada proporção observada e esperada pode ser expressa por *d*, e portanto a fórmula também pode ser escrita como $\frac{d^2}{e}$

- O teste χ2 é, essencialmente, um mecanismo pelo qual os desvios de uma proporção hipotética são reduzidos a um único valor, que permite determinar uma probabilidade a respeito da casualidade ou não dos desvios entre as proporções observadas e esperadas.

- Neste sentido, o X² será o somatório destes desvios, ou seja, $\chi^2 = \sum \frac{d^2}{e}$

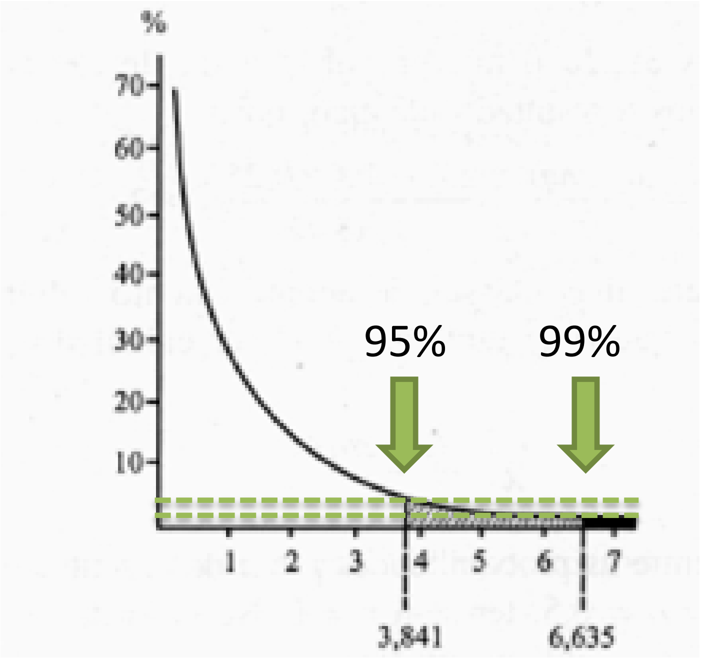
- Assim, quando as frequências observadas são muito próximas às esperadas, o valor de *X²* é pequeno, e quando as divergências são grandes, consequentemente assume valores altos.

DISTRIBUIÇÃO DO QUI-QUADRADO

Número de repetições de um dado experimento

as distribuições dos valores pequenos de X^2 são mais frequentes do que os grandes

pequenos desvios casuais entre as proporções esperadas e observadas serão mais frequentes do que os grandes desvios.



Valores de X^2 menores que 3,841têm 95% de probabilidade de ocorrência
Valores de X^2 menores que 6,635 têm 99% de probabilidade de ocorrência

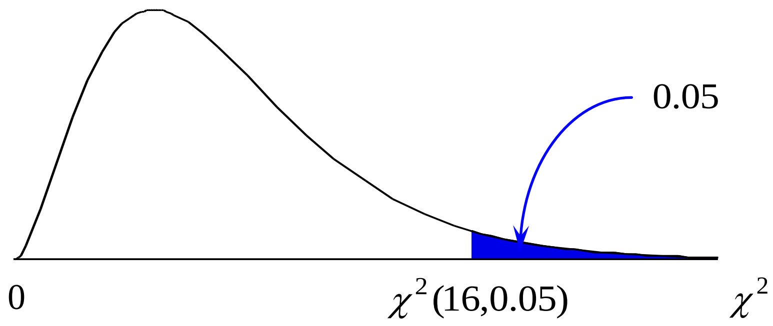
TESTE DE HIPÓTESES

- Hipótese nula (H_0) –frequências observadas = frequências esperadas. Não há associação entre os grupos (casualidade).
- Hipótese alternativa (H_1) – as frequências observadas ≠ frequências esperadas. Os grupos estão associados.
- Nível de significância (α): significa o risco de se rejeitar uma hipótese verdadeira. Deverá ser estabelecido antes da analise de dados e é usualmente fixado em 5% (P=0,05).
- O valor de X^2 ao nível de significância α é denominado qui-quadrado crítico ou tabelado (χ^2c).
- Graus de Liberdade (G.L.) : é a diferença entre o numero de classes de resultados e o número de informações da amostra que são necessários ao cálculo dos valores esperados nessas classes.

VALORES PARA QUI-QUADRADO CRÍTICO (TABELADO)

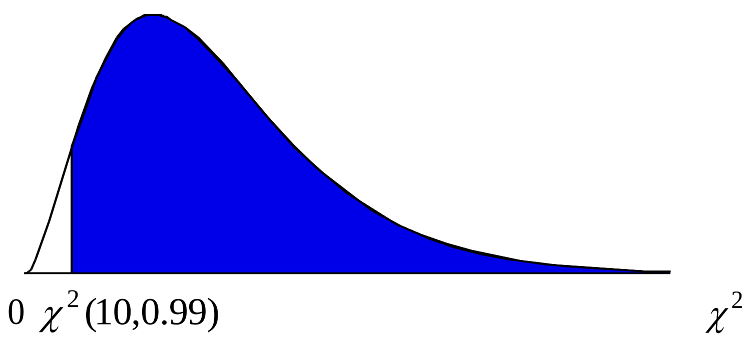
- X2(gl, α): valor crítico da distribuição qui-quadrado com G.L. e α área para a direita.
- Distribuição assimétrica: valores críticos associados com caudas à direita, e independentes com cauda à esquerda.

χ^2(16, 0.05) = 26.3



P	Área à direita		
gl	0,99	...	0,05
...			
10	2,56		
16			26,3

χ^2(10, 0.99) = 2.56



REGRAS DE DECISÃO

- É necessário obter duas estatísticas :

  X^2 calculado: obtido diretamente dos dados das amostras.

  X^2 tabelado: depende do número de graus de liberdade e do nível de significância adotado.

- Se X^2 calculado $\geq X^2$ tabelado: Rejeita-se Ho.

  Se X^2 calculado $<$ X^2 tabelado: Aceita-se Ho.

- Quando se consulta a tabela de X^2 observa-se que é determinada uma probabilidade (P) de ocorrência de um determinado acontecimento.

- Rejeita-se uma hipótese quando a máxima probabilidade de erro ao rejeitar aquela hipótese for baixa OU quando a probabilidade dos desvios terem ocorrido pelo simples acaso é baixa.

G.L. \ P	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	$0{,}0^{3}2$	$0{,}0^{3}6$	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,467
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,080	20,515
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620

TESTE DE ADERÊNCIA/ CONCORDÂNCIA

- Testar a adequabilidade de um modelo probabilístico a um conjunto de dados observados.

TESTE DE ADERÊNCIA/ CONCORDÂNCIA

- Exemplo

Um engenheiro de computação tem desenvolvido um algoritmo para gerar números aleatórios inteiros no intervalo 0-9. Ao executar o algoritmo e gerar 1000 valores, ele obtém observações com as seguintes frequências:

Frequência esperada = 1/10

H0 = Aleatório

H1 = Não aleatório

$$\frac{(o-e)^2}{e}$$

	Observado	esperado	d²/esperado
0	94	100	0,36
1	93	100	0,49
2	112	100	1,44
3	101	100	0,01
4	101	100	0,01
5	104	100	0,16
6	95	100	0,25
7	100	100	0
8	99	100	0,01
9	101	100	0,01
		x² calculado	2,74
		x² tabelado	16,92

CORREÇÃO DE CONTINUIDADE OU CORREÇÃO DE YATES

- Ao aplicar o teste do X², supõe-se que o tamanho amostral será relativamente grande,.
- Quando a amostra é pequena e/ou que a frequência esperada em uma das classes é pequena (tipicamente, quando for menor que 5) a fórmula de obtenção de X² poderá produzir um valor significativo (> do que o X² crítico), e portanto maior do que o valor real.
- Nestes casos, Fisher recomenda o uso de um fator de correção de continuidade para cada classe, a fim de evitar eventuais conclusões erradas.

$$\chi^2 = \frac{(|o_1 - e_1| - 0{,}5)^2}{e_1} + \frac{(|o_2 - e_2| - 0{,}5)^2}{e_2}$$

- De modo geral, usa-se a correção de Yates quando:

1) o valor de Qui Quadrado obtido é **maior** que o crítico e o valor de N é menor que 40 ou

2) o valor de Qui Quadrado obtido é **maior** que o crítico e há pelo menos uma classe com frequência esperada menor que 5.

TESTE DE INDEPENDENCIA/ CONTINGÊNCIA

- Verificar se existe independência entre duas variáveis medidas nas mesmas unidades experimentais.
- É aplicável em casos em que não se dispões de uma teoria ou modelo para informar a respeito das probabilidade de ocorrência esperadas nas diferentes classes.

TABELA DE CONTINGÊNCIA

Exemplo:

Um inspetor de qualidade toma uma amostra de 220 artigos num centro de distribuição. Se sabe que cada produto pode vir de uma de três fábricas e pode ou não estar defeituoso. O inspetor avalia todos os produtos e obtém os seguintes resultados

H0: A proporção de produtos defeituosos é a mesma para todas as fábricas (são independentes)

	F_1	F_2	F_3	
D	8	15	11	34
ND	62	67	57	186
	70	82	68	220

$$E_{11} = \frac{70 \times 34}{220} = 10.810 \qquad E_{21} = \frac{70 \times 186}{220} = 59.180$$

$$E_{12} = \frac{82 \times 34}{220} = 12.673 \qquad E_{22} = \frac{82 \times 186}{220} = 69.327$$

$$E_{13} = \frac{68 \times 34}{220} = 10.509 \qquad E_{23} = \frac{68 \times 186}{220} = 57.490$$

	F_1	F_2	F_3	
D	10.81	12.67	10.51	34
ND	59.18	59.33	57.49	186
	70	82	68	220

$$\chi^2 = \sum \frac{d^2}{e}$$

$$: \frac{(8-10.81)^2}{10.81} + \ldots + \frac{(57-57.49)^2}{57.49} = 1.398$$

Note que no teste de independência, temos $(r-1)(s-1)$ graus de liberdade, onde r e s são o número de linhas e de colunas. Então temos 2 graus de liberdade, e o *p-value* do teste é 0.497, ou seja, não rejeitamos a hipótese de independência entre o eventos "peça defeituosa" e "peça da fábrica i".

TABELAS 2 X 2

- Tendo apenas <u>um</u> G.L., não é necessário calcular valores esperados.

$$\chi^2 = \frac{(ad - bc)^2 xN}{n1xn2xn3xn4}$$

EXEMPLO:

H0

Sexo	Maligna	Benigna	Total
M	15 (a)	35 (b)	50 (n1)
F	6 (c)	24 (d)	30 (n2)
Total	**21 (n3)**	**59 (n4)**	**80 (N)**

X^2 calculado = 0,968

X^2 tabelado = 3,841

X^2 (1,0.05) = 0,968; 0,30<P<0,50

TABELAS 2 X 2

- Correção de Yates / Continuidade

$$\chi^2 = \frac{(|ad - bc| - 0{,}5.N)^2 xN}{n1xn2xn3xn4}$$

REGRAS DE APLICAÇÃO:

1) o valor de X^2 obtido é **maior** que o crítico e o valor de N é menor que 40 ou
2) o valor de X^2 obtido é **maior** que o crítico e há pelo menos uma classe com frequência esperada menor que 5.

X^2 calculado = 0,968 < X^2 tabelado = 3,841

NÃO É NECESSÁRIO

TESTE DE HETEROGENEIDADE

- Pode-se testar se amostras diferentes em uma série de experimentos semelhantes são homogêneas ou não.
- Nesse caso, calcula-se o X^2 de cada amostra e o X^2 do total (X^2t)
- Depois, soma-se os X^2 obtidos para cada amostra (ΣX^2) e da soma se subtrai o valor obtido para o total de qui quadrados (X^2t).
- O valor final obtido é o X^2 de heterogeneidade.

TESTE DE HETEROGENEIDADE

- Exemplo: amostras de filhos de casais MN X MN

Amostras	*MM*	*MN*	*NN*	*Total*
Belém - PA	19	38	23	80
Maceió - AL	18	25	17	60
São Carlos - SP	8	23	9	40
Total	45	86	49	180
Proporções esperadas	1/4	1/2	1/4	

Amostras		χ^2	GL
Belém - PA	$(19-20)^2/20 + (38-40)^2/40 + (23-20)^2/20$	0,600	2
Maceió - AL	$(18-15)^2/15 + (25-30)^2/30 + (17-15)^2/15$	1,700	2
São Carlos - SP	$(8-10)^2/10 + (23-20)^2/20 + (9-10)^2/10$	0,950	2
Total X^2t	$(45-45)^2/45 + (86-90)^2/90 + (49-45)^2/45$	0,534	2

$\Sigma X^2 = 3{,}250$; $\Sigma G.L. = 6$

$X^2t - \Sigma X^2 = 2{,}716$; $G.L. = 6-2 = 4$

$X^2(4)$ calculado $= 2{,}716$

$X^2(4)$ crítico $= 9{,}488$

$X^2 (4, 0.05) = 2{,}716$; $0{,}70<P<0{,}50)$

NÃO SÃO HETEROGÊNEAS

REFERÊNCIAS

- BEIGUELMAN, B. 1996.Curso de Bioestatística Básica. 4ed. Ribeirão Preto: Sociedade Brasileira de Genética.